

Département: Mathématiques	Examen (Session principale)
Epreuve de : Probabilités et Statistiques	Date : 04/ 01 /2024
Enseignant : Om Kalthoum Wanassi	Durée : 1h30.
Classe :LCE2 & LCS2	Documents Non autorisés

Exercice 1. Une boîte contient 8 cubes:

- 1 gros rouge et 3 petits rouges,
- 2 gros verts et 1 petit vert,
- 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur.

- On note A l'événement: "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et B l'événement: "Obtenir au plus un petit cube".
 - Calculer la probabilité de A.
 - Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.
- Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
 - Déterminer la loi de probabilité de X.
 - Calculer l'espérance de X.
- L'enfant répète 5 fois l'épreuve "tirer simultanément 3 cubes de la boîte", en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note p la probabilité que l'événement B soit réalisé.
 - Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.
 - Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

Exercice 2. Un joueur lance un dé équilibré et gagne 1 DT si le résultat est pair, il perd 1 DT si le résultat est un ou trois et ne perd ou ne gagne rien si le résultat est cinq.

On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- Déterminer la loi de X.
- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$ et calculer $E(Y)$.

Exercice 3. Soit la fonction réelle p définie par:

$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)} & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Montrer que p est une loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.
- Déterminer F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
- Déduire la valeur de $p(h \leq X \leq k)$ où h, k $\in \mathbb{N}$ et $h < k$.

Exercice 4. Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = kx(1-x)I_{]0,1[}(x), \quad k > 0.$$

1. Déterminer la constante k pour que f une densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .
3. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$.

Exercice 5. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. À quelle conditions sur a et b la fonction f est-elle la densité d'une variable aléatoire continue?
2. On suppose que a et b vérifient les conditions déterminées à la question précédente. Soit X une variable aléatoire de densité f . On suppose que $P(X \geq 0.5) = \frac{7}{8}$. En déduire a et b . F
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ en utilisant les valeurs de a et b obtenues à la question précédente.

Exercice 6. Pour le jeu suivant, on utilise un dé à 4 faces numérotées 0, 2, 3 et 5. On dispose aussi d'une urne contenant trois billes numérotées respectivement 1, 3 et 5.

Dans ce jeu, on procède de la façon suivante: on lance le dé puis on tire une bille si le dé donne 0, on ne gagne rien. Sinon, on gagne 5€ si le dé et la bille portent le même numéro, sinon on gagne 1€.

1. Donner l'univers Ω et la probabilité associée à l'expérience aléatoire.
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.
 - a) Donner la définition de X (on pourra utiliser un tableau).
 - b) Expliciter $X(\Omega)$.
3. Donner la loi de X .
4. Calculer l'espérance $E(X)$.