



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE MONSTIR, TUNISIE

INSTITUT SUPEIEUR D'INFORMATIQUE DE MAHDIA

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ET

UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR, TUNISIE

LABORATOIRE DE MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DANS LES
SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Présenté par

Radhouane FEKIH SALEM

COURS de Probabilités

Année Universitaire : 2020-2021

Table des matières

II	Variables aléatoires	1
1	Définition d'une variable aléatoire	1
2	Les différents types de variables aléatoires	1
3	Loi de probabilité	1
4	Fonctions de répartition	1
4.1	Pour une variable discrète	1
4.2	Pour une variable continue	1
5	Espérance	2
6	Moments	4
6.1	Moments non-centrés d'ordre r	4
6.2	Moments centrés d'ordre r	5
7	Variance	5
III	Lois de probabilités	7
1	Lois discrètes	7
1.1	Lois uniformes	7
1.2	Lois de Bernoulli	7
1.3	Lois binomiales	8
1.4	Lois géométriques	9
1.5	Lois de Poisson	10
2	Lois continues	11
2.1	Lois uniformes	11
2.2	Lois exponentielles	13
2.3	Lois normales	14

A Série N°3 : LOIS DE PROBABILITÉS	17
B Résumé des lois classiques	25

Chapitre II

Variables aléatoires

- 1 Définition d'une variable aléatoire
- 2 Les différents types de variables aléatoires
- 3 Loi de probabilité
- 4 Fonctions de répartition
 - 4.1 Pour une variable discrète
 - 4.2 Pour une variable continue

La probabilité ponctuelle $\mathbb{P}(X = x) = f(x)$ est la fonction densité. La fonction de répartition $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

La fonction de répartition est généralement représentée graphiquement par une courbe cumulative :

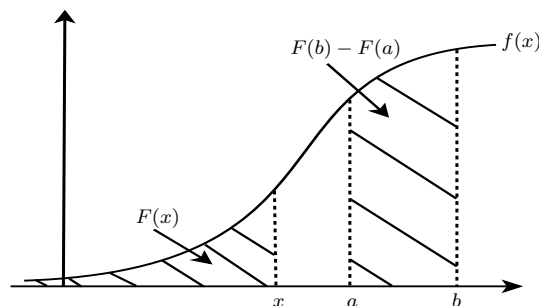


Fig. II.1 – Fonction de répartition.

On a l'identité

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \quad \forall a < b$$

Propriété 1.

1. $f \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Cette propriété est souvent utilisée pour montrer qu'une fonction est effectivement une densité.

Propriété 2.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. F est une fonction continue et croissante.
3. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Proposition II.1. Si la fonction de répartition F est dérivable, alors X est une variable à densité et sa densité est la dérivée de F :

$$f(x) = F'(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

5 Espérance

Cas de variables discrètes :

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que $D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$. L'espérance de la variable aléatoire X est définie par :

$$\mathbb{E}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Cas de variables continues :

Soit une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ de fonction densité f définie sur $\mathbb{R}$. L'espérance de X est définie par :

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

L'espérance existe lorsque cette intégrale est bien définie.

Propriété 3. (Espérance d'une constante) : $\mathbb{E}(a) = a$.

Preuve 1. $\mathbb{E}(a) = \int_{\mathbb{R}} a f(x) dx = a \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = a \times 1 = a$.

On peut en déduire que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X)] = \mathbb{E}(X)$, puisque $\mathbb{E}(X)$ n'est pas une variable aléatoire.

Exercice 1. On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Déterminer la loi de X . Calculer son espérance.

Solution : Les cas possibles sont :

$R, NR, NN, NJR, NJN, NJJR, NJJN, NJJJ,$
 $JR, JNR, JNN, JNJR, JNJN, JNJJ,$
 $JJR, JJNR, JJNN, JJNJ, JJJ$

Ainsi, la loi de X est donnée par : L'espérance de X est

x_i	1	2	3	4	$\sum$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{19}{19} = 1$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{19} + \frac{6}{19} + \frac{18}{19} + \frac{36}{19} = \frac{61}{19} \simeq 3.21.$$

Propriété 4. (L'espérance est un opérateur linéaire) :

- $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- De manière générale : pour tout $(a_i, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i) + b.$$

Exercice 2. Soit la variable aléatoire X définie par sa fonction densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ -x + 2 & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

1. Représenter f et vérifier qu'elle est une fonction densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable X .
3. Calculer l'espérance de la variable X .

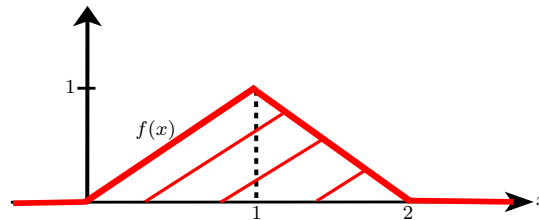


Fig. II.2 – Aire triangle.

Solution :

Chapitre II. Variables aléatoires

1. Calcul géométrique : Aire triangle : $\frac{1}{2}(base \times hauteur) = 2 \times 1/2 = 1$.

Calcul analytique :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^1 xdx + \int_1^2 (-x+2)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = 1\end{aligned}$$

2. Un calcul direct montre que :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0, 1[\\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En effet, si $x \in [0, 1[$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Si $x \in [1, 2]$, alors

$$F(x) = \int_0^1 tdt + \int_1^x (-t+2)dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{t^2}{2} + 2t\right]_1^x = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

Si $x > 2$, alors

$$F(x) = \int_0^1 tdt + \int_1^2 (-t+2)dt + \int_2^x 0dt = 1 \text{ (voir question 1).}$$

3. L'espérance de la variable X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (-x^2+2x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1 = 1.$$

6 Moments

6.1 Moments non-centrés d'ordre r

Un moment non-centré d'ordre r est définie par

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Pour une variable aléatoire discrète :

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^n x_i^r \mathbb{P}(X = x_i),$$

où X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que $D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Pour une variable aléatoire continue :

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx,$$

où la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de fonction densité f définie sur $\mathbb{R}$.

6.2 Moments centrés d'ordre r

Un moment centré d'ordre r est définie par

$$\mu_r(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^r).$$

Pour une variable aléatoire discrète :

$$\mu_r(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^r \mathbb{P}(X = x_i),$$

où X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$ tel que $D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Pour une variable aléatoire continue :

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^r f(x) dx,$$

où la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ est de fonction densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Si $r = 0$, alors $\mu_0(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^0) = \mathbb{E}(1) = 1$.

Si $r = 1$, alors $\mu_1(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^1) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$.

7 Variance

On appelle variance d'une variable aléatoire X , notée $\mathbb{V}(X)$, le moment centré d'ordre 2 de X :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Pour toutes les variables aléatoires, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + (\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2.$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Propriété 5. Soient a et b deux constantes et X une variable aléatoire.

1. $\mathbb{V}(a) = 0$
2. $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.
3. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

La variance est un nombre positif, qui peut être infini même si l'espérance existe.

Définition 7.1. On appelle alors écart-type, noté $\sigma(X)$, la racine de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarque. De façon générale, la variance d'une variable mesure la moyenne des carrés des écarts à sa moyenne. Ainsi, plus la loi d'une variable est étalée autour de sa moyenne, plus sa variance est grande. D'autre part, si X représente une grandeur physique (donc ayant une dimension, par exemple une durée), alors l'écart-type a la même dimension que X , tandis que la variance a cette dimension au carré, ce qui la rend moins parlante en pratique. Le terme écart-type est d'ailleurs à comprendre au sens "écart typique" d'une variable à sa moyenne.

Chapitre III

Lois de probabilités

1 Lois discrètes

1.1 Lois uniformes

Définition 1.1. Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire X sont équiprobables. Si n est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad \forall k \in [1, n].$$

On note $X \hookrightarrow \mathbb{U}_{[1, n]}$.

Espérance et variance : Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi uniforme sur $[1, n]$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exemple 1. La distribution des chiffres obtenus au lancer d'un dé non truqué suit une loi uniforme dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}, \quad \forall k \in [1, 6]$$

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

De plus,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2} = 3.5 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{35}{12} \approx 2.917.$$

1.2 Lois de Bernoulli

Définition 1.2. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , notée $\mathfrak{B}(p)$, si la variable aléatoire X prend la valeur 1 (succès) avec probabilité p , c'est à dire $\mathbb{P}(X = 1) = p$, et la

Chapitre III. Loïs de probabilités

valeur 0 (échec) avec probabilité $q = 1 - p$, c'est à dire $\mathbb{P}(X = 0) = q$. Ainsi, $X(\omega) = \{0, 1\}$. On note $X \hookrightarrow \mathfrak{B}(p)$.

Espérance et variance : Si $X \hookrightarrow \mathfrak{B}(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = pq.$$

En effet,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^2 x_i \mathbb{P}(X = x_i) = 0 \times q + 1 \times p = p.$$

De plus,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sum_{i=1}^2 x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - p^2 = 0^2 \times q + 1^2 \times p - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Exemple 2. On considère une seule lancer d'un dès non truqué et le fait d'obtenir le nombre 5 est un succès ($X=1$) avec une probabilité $1/6$ et le fait d'obtenir un chiffre différent de 5 est un échec ($X = 0$) avec une probabilité $5/6$. Donc $X \hookrightarrow \mathfrak{B}(1/6)$. De plus, on a $\mathbb{E}(X) = 1/6$ et $\mathbb{V}(X) = 5/36$.

1.3 Loïs binomiales

Schéma de Bernoulli : On appelle schéma de Bernoulli à n épreuves de paramètre p , la répétition n fois de suite avec indépendance de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Définition 1.3. Considérons une variable aléatoire X qui compte le nombre de réalisation du succès au cours de n épreuves. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p . Ainsi, $X(\omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $X \hookrightarrow \mathfrak{B}(n, p)$. On a

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Il est facile de montrer que l'on a bien une loi de probabilité car

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

Espérance et variance : Si $X \hookrightarrow \mathfrak{B}(n, p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = npq.$$

Exemple 3. Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer 3 fois une pièce de monnaie non truquée. On considère une variable aléatoire X qui compte le nombre de face obtenus (succès). Donc $X \hookrightarrow \mathfrak{B}(3, 1/2)$

avec $X(\omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Par exemple,

$$\mathbb{P}(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \mathbb{P}(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X) = 3/2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 3/4.$$

Exemple 4. Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés où un succès consiste à obtenir une somme égale à sept. Si on répète quatre fois cette expérience, quelle est la probabilité d'obtenir 2 succès ?

Donc $X \hookrightarrow \mathfrak{B}(4, p)$ avec $X(\omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $p = 6/36 = 1/6$ puisqu'il y a six cas favorables

$$\{(6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6)\}$$

parmi 36 cas. D'où

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.116.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X) = 4/6 = 2/3 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 10/18 = 5/9.$$

1.4 Lois géométriques

Définition 1.4. Si une variable aléatoire X représente le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un premier succès, lors d'une succession d'épreuve de Bernoulli, alors X obéit à une distribution géométrique. On note $X \hookrightarrow \mathfrak{g}(p)$. Ainsi, $X(\omega) = \mathbb{N}^*$.

Si X prend la valeur k , alors en notant e pour échecs et s pour succès, on a :

$$(e, e, e, \dots, e, s)$$

où il y en a $k - 1$ échec ensuite au $k^{\text{ème}}$ épreuve un succès. Comme les épreuves sont indépendantes, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(e \cap e \cap \dots \cap e \cap s) = [\mathbb{P}(e)]^{k-1} \mathbb{P}(s) = q^{k-1} p$$

Définition 1.5. On dit qu'une variable aléatoire X , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suit une loi géométrique si sa loi de probabilité est

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1} p$$

où p est un réel de $]0, 1[$ avec $q = 1 - p$.

Espérance et variance : Si $X \hookrightarrow \mathfrak{g}(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Chapitre III. Loïs de probabilités

Exemple 5. Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dès jusqu'à l'obtention du nombre six. Soit X le nombre de lancer nécessaires à la réalisation de cet événement.

Donc $X \hookrightarrow \mathfrak{g}(1/6)$ avec $X(\omega) = \mathbb{N}^*$. De plus,

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}, \quad \mathbb{E}(X) = 6, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30.$$

1.5 Loïs de Poisson

C'est la loi des événements rares, c'est à dire des événements avec une probabilité faible. Par exemple, le nombre de chèques émis sans provision, des accidents d'avions, etc.

Définition 1.6. Une variable aléatoire X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque les valeurs de X sont les entiers naturels k et que

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{III.1}$$

où λ est le nombre moyen de succès dans un intervalle de temps considéré. On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Ainsi, $X(\omega) = \mathbb{N}$.

Espérance et variance : Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Exemple 6. Un standard téléphonique reçoit en moyenne 0.45 appel à la minute. Quelle est la probabilité pour que entre 9h59 et 10h, il reçoive

- 1) 0 appel; 2) 1 appel; 3) plus d'un appel.

Soit X le nombre d'appel reçu en une minute entre 9h59 et 10h. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(0.45)$. En utilisant la table de poisson ou la formule (III.1), on a

1. $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-0.45} \cdot \frac{0.45^0}{0!} = e^{-0.45} = 0.638.$
2. $\mathbb{P}(X = 1) = e^{-0.45} \cdot \frac{0.45^1}{1!} = e^{-0.45} 0.45 = 0.287.$
3. $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)) = 0.075.$

2 Lois continues

2.1 Lois uniformes

Définition 2.1. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

On note $X \hookrightarrow \mathbb{U}_{([a,b])}$.

Remarque. Cette définition est bien conforme à la définition générale d'une densité. En effet, une fonction constante est continue sur $[a, b]$ et si on appelle k cette constante, on doit avoir :

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad \text{c'est à dire} \quad k(b-a) = 1 \quad \text{ou encore} \quad k = \frac{1}{b-a}.$$

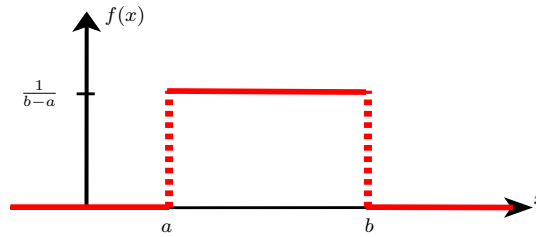


Fig. III.1 – Représentation de la fonction densité $f(x)$ de la loi uniforme.

La fonction de répartition F associée à la loi uniforme continue est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Espérance : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ dont la fonction de

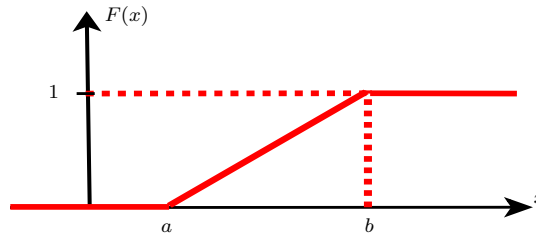


Fig. III.2 – Représentation de la fonction de répartition $F(x)$ de la loi uniforme.

densité est f . Son espérance est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2}.$$

Chapitre III. Loïs de probabilités

En effet :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

Variance : Soit $X \hookrightarrow \mathbb{U}_{([a,b])}$. La variance de la loi uniforme continue vaut

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3) - \frac{(b^2 + a^2 + 2ab)}{4} = \frac{(b^2 - 2ab + a^2)}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire qui est uniformément distribuée entre 10 et 20.

1. Déterminer la forme analytique des fonctions de densité et de répartition de X .
2. Dessiner la fonction densité de probabilité.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 15)$ et $\mathbb{P}(12 < X \leq 18)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Réponse :

1. On a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } x \in [10, 20] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ \frac{x-10}{10} & \text{si } x \in [10, 20] \\ 1 & \text{si } x > 20 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

2. La fonction densité $f(x)$ est représentée dans la [III.3](#)

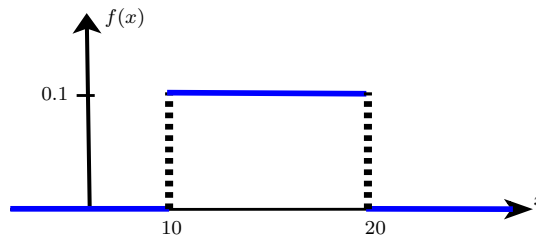


Fig. III.3 – Représentation de la fonction densité $f(x)$ de la loi uniforme.

- 3.

$$\mathbb{P}(X < 15) = \mathbb{P}(X \leq 15) = F(15) = \frac{15 - 10}{10} = 0.5$$

et

$$\mathbb{P}(12 < X \leq 18) = F(18) - F(12) = \frac{18 - 12}{10} = 0.6$$

$$4. \mathbb{E}(X) = \frac{10+20}{2} = 15 \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{(20-10)^2}{12} \approx 8.33.$$

2.2 Loïs exponentielles

Définition 2.2. Soit λ un réel strictement positif. On appelle loi exponentielle de paramètre λ , la loi de probabilité dont la fonction densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Cette loi est aussi appelée loi de durée de vie sans vieillissement

Remarque. Cette fonction est bien une fonction densité car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-\lambda t}]_x^0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1.$$

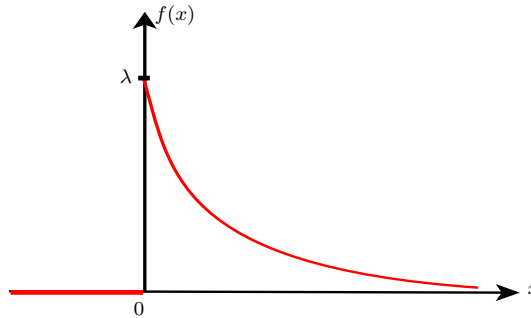


Fig. III.4 – Représentation de la fonction densité $f(x)$ d'une loi exponentielle.

La fonction de répartition F associée à la loi exponentielle est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

En effet, si $x \geq 0$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [e^{-\lambda t}]_x^0 = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$.

Espérance et variance : Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.3 Loïs normales

Définition 2.3. On parle de loi normale lorsqu'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant d'un grand nombre de cause indépendants. Par exemple, la taille humaine, les erreurs de mesures lors d'une expérience, etc.

Une variable aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

avec $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

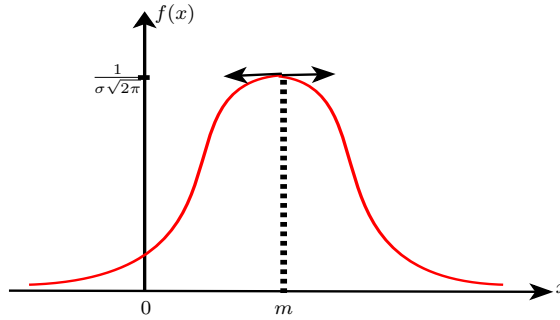


Fig. III.5 – Représentation de la fonction densité $f(x)$ d'une loi normale.

Espérance et variance : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = m \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Calcul pratique des probabilités d'une variable aléatoire normale : La standardisation s'effectue avec le changement de variable :

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}.$$

On a

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \iff Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

où $\mathcal{N}(0, 1)$ est la loi normale centrée réduite de fonction densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Trois types de probabilités peuvent être calculés pour une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

1. $\mathbb{P}(X \leq c)$, avec c est une constante

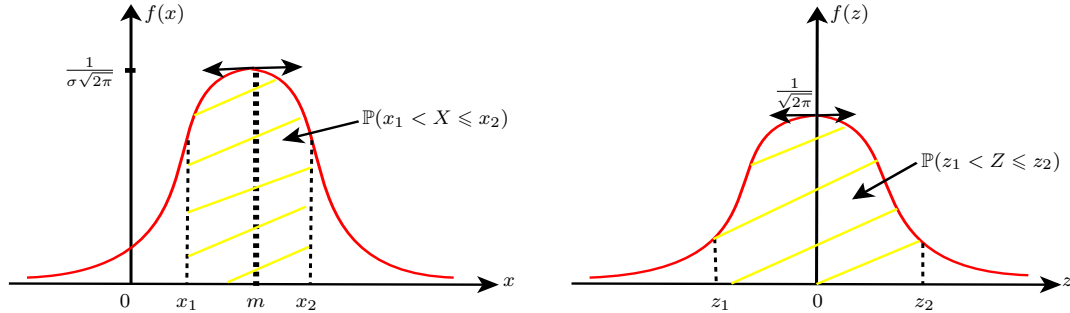


Fig. III.6 – Standardisation de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ par la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. $\mathbb{P}(X \geq c)$, avec c est une constante
3. $\mathbb{P}(c_1 < X \leq c_2)$ avec c_1 et c_2 sont deux constantes, alors
 1. $\mathbb{P}(Z \leq \frac{c-m}{\sigma})$
 2. $\mathbb{P}(Z \geq \frac{c-m}{\sigma})$
 3. $\mathbb{P}(\frac{c_1-m}{\sigma} < Z \leq \frac{c_2-m}{\sigma})$

où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Propriété 6. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors pour tout $x > 0$, on a

1. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x)$
2. $\mathbb{P}(X \leq -x) = F(-x) = 1 - F(x)$
3. $\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Exemple :

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors $\mathbb{P}(X \leq 0.38) = F(0.38) = 0.648$ et $\mathbb{P}(X \leq 1.29) = F(1.29) = 0.9015$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3, 4)$, alors $\mathbb{P}(X \leq 6.24) = \mathbb{P}\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{6.24-3}{2}\right)$. On pose

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \quad \text{avec} \quad m = 3, \sigma = 2 \quad \text{donc} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X \leq 6.24) = \mathbb{P}(Z \leq 1.62) = F(1.62) = 0.9474$.

3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-2, 16)$, alors $\mathbb{P}(X > 4.96) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4.96)$. On pose

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \quad \text{avec} \quad m = -2, \sigma = 4 \quad \text{donc} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X > 4.96) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{4.96+2}{4}\right) = 1 - F(1.74) = 1 - 0.9591 = 0.0409$.

4. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-3, 4)$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-4 < X \leq 0) &= \mathbb{P}\left(\frac{-4+3}{2} < Z \leq \frac{0+3}{2}\right) = F(1.5) - F(-0.5) = F(1.5) - (1 - F(0.5)) \\ &= 0.9332 + 0.6915 - 1 = 0.6247. \end{aligned}$$

