

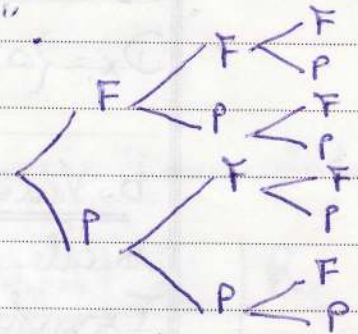
Variables aléatoires

1) Définition d'une variable aléatoire:

* Exemple introductif: on considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer 3 fois de suite une pièce de monnaie (deux valeurs possibles: "pile" ou "face").

l'ensemble fondamental

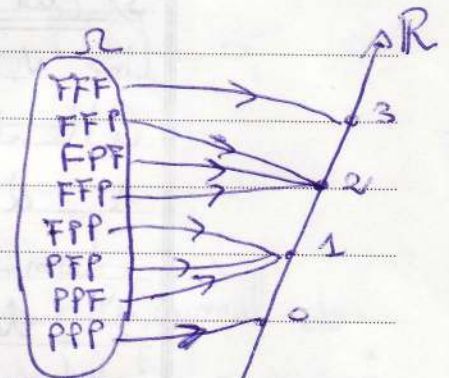
$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$



Notons X le nombre de face obtenu au bout des trois jets des valeurs possibles de X sont $D_X = \{0, 1, 2, 3\}$

X est une application: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

X s'appelle une variable aléatoire



Définition: Soient une expérience e_i et Ω l'ensemble fondamental des éventualités. L'application $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fait correspondre à tout élément de Ω un nombre réel

$$\forall e_i \in \Omega, e_i \rightarrow X(e_i) \in \mathbb{R}$$

X désigne la Variable Aléatoire (v.a), x désigne la valeur possible de la v.a, le domaine de définition de X est $D_X = \{x_1, \dots, x_n\}$

2) des différents types de variables aléatoires :

a) Variable aléatoire discrète : Une v.a. est dite discrète lorsque les valeurs x_i qu'elle est susceptible de prendre sont en nombre fini, ou encore formés de nombres entiers.

Exemples : 1 - Nombre de "faces" apparaissant après le jet d'une pièce de monnaie. $D_x = \{0, 1, \dots, 10\}$

2 - Nombre de véhicules passant à un carrefour dans une journée.
 $D_x = \{0, 1, 2, \dots\}$

b. Variable aléatoire continue : Une v.a. est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

Exemples : 1 - Intervalle de temps entre 2 passages de train $[1, 4]$

2 - Durée de vie en secondes d'une pièce mécanique. $[0, 10^6]$

3) Loi de probabilité :

Une v.a. est totalement définie par sa loi de probabilité. Cette dernière est caractérisée par :

1 - l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre (son domaine de définition D_x)

2 - des probabilités attribuées à chacune de ses valeurs $P(X=x)$

Exemple 1 : On lance successivement 3 fois une pièce de monnaie. Soit la v.a. X représentant le nombre de faces obtenues après ces 3 lancements.

1 - Donner les valeurs de X

2 - Définir la loi de probabilité de X .

Solution:

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FFP, PFP, PPF, PPP\}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

X	0	1	2	3	Σ
$P(X=n)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Exemple 2: Dans une urne, il y a des boules blanches et rouges. des blanches sont en proportion p et les rouges en proportion $q = 1 - p$. Soit l'expérience $\{$ on tire une boule $\Omega = \{B, R\}$

$$P(B) = p \text{ et } P(R) = q$$

X : le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de probabilité de X .

	événement élémentaires	B	R
$X=0$ si la boule est blanche	Valeurs de X	0	1
$X=1$ si la boule est rouge	$P(X=n)$	p	q

$$P(X=0) = P(B) = p \text{ et } P(X=1) = P(R) = q$$

4) Fonction de répartition:

a) Pour une variable discrète:

la fonction de répartition n'est autre que le cumul des probabilités individuelles. la probabilité pour que la v.a. X prenne une valeur inférieure à x est une fonction $F(x)$ que l'on appelle fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x)$$

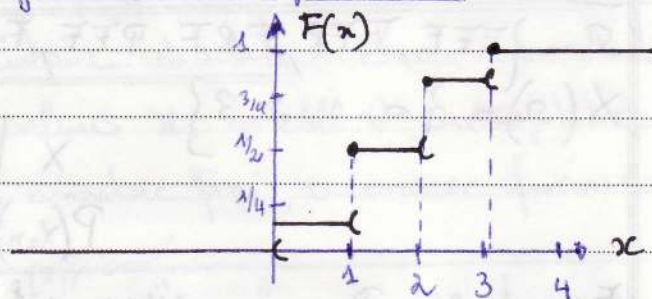
si $D_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^K P(X = x_k)$$

où K est donné par $x_K \leq x < x_{K+1}$

Schéma de la fonction de répartition

Exemple 1.



Remarque: F est continue à droite.

Exemple: Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés, on considère la v.a. X = la somme des résultats des deux dés.

* Déterminer la loi de probabilité de cette v.a. ?

Réponse: $D_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ✓

F de réparti

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}=1$
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}=1$	

$$\text{Ainsi } F(5) = P(X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

* Déterminer $P(4 < X \leq 8)$?

$$P(4 < X \leq 8) = P(5 \leq X \leq 8) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) \\ = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36}$$

Autrement:

$$P(4 < X \leq 8) = F(8) - F(4) = \frac{26}{36} - \frac{6}{36} = \frac{20}{36}$$

b) Pour une variable continue:

la probabilité ponctuelle $P(X=x) = f(x)$ est la fonction de densité.