

Probabilités

I. Rappels:

1. loi de probabilité :

Def: On appelle expérience aléatoire toute expérience ayant plusieurs issues (ou éventualités possibles) et dont on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.

des éventualités sont notées $e_1, e_2, \dots, e_n$.
leur ensemble est noté Ω et est appelé univers.

On appelle épreuve la réalisation d'une expérience aléatoire.

On a donc $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Exemple : On lance un dé à 6 faces
l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Def: - Chaque éventualité e_i est affectée d'une probabilité, c'est à dire d'un nombre noté p_i tel que

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

- On appelle loi de probabilité la donnée des p_i vérifiant ces conditions.

- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité on dit qu'ils sont équiprobables

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré
la loi de probabilité est :

e_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Rq. De manière générale, si une expérience aléatoire est équiprobable et comporte n issues différentes, chacune des issues a une probabilité de $\frac{1}{n}$.

2) Analyse combinatoire :

d'analyse combinatoire est le dénombrement des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini.

soit $\Omega = \{e_1, \dots, e_n\}$ alors $\text{card}(\Omega) = n$

a) Principe de multiplication :

Il permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences. Si la $i^{\text{ème}}$ expérience a n_i résultats possibles pour $i = 1, \dots, m$, alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est :

$$n = \prod_{i=1}^m n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$$

Exemple : Vous achetez une valise à code 4 chiffres.
Combien de possibilités avez-vous de choisir un code ?

Réponse :

$m=4$ avec $n_1=10, n_2=10, n_3=10, n_4=10$

donc le nombre total de code possible est : 10^4

b) Permutation:

Déf: Une permutation de n éléments distincts $e_1, \dots, e_n$ est un déarrangement ordonné, sans répétition de ces n éléments.

Exemple: soit "a", "b" et "c" trois éléments.

des arrangements possibles sont:

$(a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, a, b); (c, b, a)$

Le nombre d'arrangement est donc 6.

Le nombre de permutation de n éléments distincts est:

$$n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ainsi, $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \dots$

Exemple: 4 Américains, 5 Français et 7 Tunisiens doivent s'assoier sur une même banc, et doivent rester groupés par nationalité. Combien y a-t-il de dispositions possibles?

Réponse: $3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 7!$

c) Arrangement:

Déf: Un arrangement est une permutation de K éléments parmi n éléments distincts ($K \leq n$).
des éléments sont pris sans répétition et sont ordonnés

Notation:

Le nombre de permutation de K éléments parmi n est:

$$A_n^K = \frac{n!}{(n-K)!}$$

Exemple: Le nombre de permutation de 2 éléments pris dans $\{1, 2, 3, 4\}$ sont: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 1\}$

$\{3,2\}, \{3,4\}, \{4,1\}, \{4,2\}, \{4,3\}$

Il y en a $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$

Exemple: Combien de mots de 3 lettres distincts peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres?

Réponse: Distincts $\rightarrow$ Sans Répétition et Ordonné

$\rightarrow$ Il y en a $A_{26}^3 = \frac{26!}{23!} = 26 \times 25 \times 24 =$

Exemple 3: Combien de mots de 3 lettres peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres?

Réponse: AAA : avec Répétition $\rightarrow$ Multiplication

$\rightarrow$ Il y en a 26^3

c) Combinaisons:

Def: Une combinaison de k éléments pris dans un ensemble à n éléments distincts et un sous-ensemble à k éléments de cet ensemble. des éléments sont pris sans répétition et ne sont pas ordonnés

Notation: le nombre de combinaisons de k parmi n est:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple 1: des combinaisons de 2 éléments pris dans $\{1,2,3,4\}$ sont $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$

Il y en a $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{4} = 6$

Exemple 2: On a 15 médicaments et on veut tester leurs compatibilités en groupe de 4. Combien y a-t-il de groupes possibles?

Réponse: $C_{15}^4 = \frac{15!}{4! \cdot 11!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{(4 \times 3 \cdot 2) 11!} = 1365$ possibles

de binôme de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Propriétés: $C_n^0 = C_n^n = 1$ $C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

3) Vocabulaire des événements:

Def: Un événement A est une partie de l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).

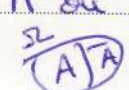
$\emptyset$ est l'événement impossible
 Ω est l'événement certain.

Exemple 1: On lance un dé à 6 faces bien équilibrées. Des exemples d'événements:

- A: "obtenir un nombre pair" $\rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
- B: "obtenir un nombre inférieur ou égal à 2" $\rightarrow B = \{1, 2\}$
- C: "obtenir un nombre strictement supérieur à 4" $\rightarrow C = \{5, 6\}$
- D: "obtenir 7" $\rightarrow D = \emptyset$ (événement impossible)
- F: "obtenir un nombre inférieur ou égal à 6" $\rightarrow F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- E: Ω (événement certain)

Def: soit A et B deux événements d'un univers Ω
- l'événement $A \cap B$ est l'événement "A et B" 

- " $A \cup B$ " " " "A ou B" 

- " $\bar{A}$ " " "contraire de A" ou "complément" 

- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$

Exemple 1: On reprend les notations de l'exemple 1
 $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$
des événements B et C sont incompatibles.

Probabilité d'un événement

Propriété: la probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le composent. On note par $P(A)$.

On a donc $0 \leq P(A) \leq 1$.

Rq: 1) $P(\Omega) = 1$, d'ensemble Ω est un événement certain

2) $P(\emptyset) = 0$, d'ensemble vide est un événement impossible

3) Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers

Ω comporte n issues, on a $p_i = \frac{1}{n}$ et

$$P(A) = \frac{\text{nbr d'éléments de } A}{\text{nbr d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Propriétés: 1) si A et B sont deux événements:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ et } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2) si les événements A et B sont incompatibles (ou disjoints)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \hookrightarrow A \cap B = \emptyset \quad \begin{matrix} A & B \\ \text{---} & \text{---} \end{matrix}$$

Exemple 1: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

II - Axiomes du calcul des probabilités:

1) Espace probabilisé:

Déf: Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle un espace probabilisable.

Déf: Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle probabilité définie sur cet espace, toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) si A et B sont deux événements incompatibles, alors
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ s'appelle un espace probabilisé fini.

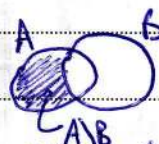
Propriétés élémentaires: soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements:

1 - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, donc $P(\emptyset) = 0$



2 -

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$



où $A \setminus B$ est l'événement "A est réalisé et B n'est pas réalisé"

3 - si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$



4 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ preuve: voir Ex 4, Seic 1

5 - $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$

6 - Si les événements A_i sont incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

2) Théorèmes des probabilités composées:

a) Probabilités conditionnelles:

Soient deux événements A et B tels que $A \cap B \neq \emptyset$. La probabilité de réalisation de l'événement B lorsque l'événement A est réalisé s'appelle "probabilité conditionnelle de B par rapport à A" que l'on note $P(B/A)$. On dit également "probabilité de B si A" ou encore "probabilité de B sachant A".

$$\text{On a } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\text{Rq: } P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

$$- P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Exemple: Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont de couleur bleue et à l'ammende et 40% des dragées bleues sont au chocolat.

On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note:

A: l'événement "la dragée est à l'ammende"

B: l'événement "la dragée est bleue"

C: l'événement "la dragée est au chocolat"

1. Quelqu'un prend une dragée bleue, quelle est la probabilité qu'elle soit au chocolat?

2. Quelqu'un prend une dragée bleue, quelle est la probabilité qu'elle soit à l'ammende?

3. Quelle est la probabilité de prendre une dragée bleue et au chocolat?

Réponse: Traduisons les données de l'énoncé:

$$P(B) = 0,6, P(A \cap B) = 0,3, P(C/B) = 0,4$$

1) La probabilité d'obtenir une dragée au chocolat sachant qu'elle est bleue est donnée par $P(C/B) = 0,4$

2) la probabilité d'obtenir une dragée à l'ammend sachant qu'elle est bleue : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5$

3) la probabilité de prendre une dragée bleue et au chocolat
 $P(B \cap C) = P(C/B) \cdot P(B) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$

b) Théorème des probabilités composées:

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors, on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

c) Formule des probabilités totales:

Déf. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle système complet d'événements de Ω , toute famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'événements telle que :

1 - des événements A_i sont deux à deux incompatibles

2 - $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$



Théorème: Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B , on a:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i)$$



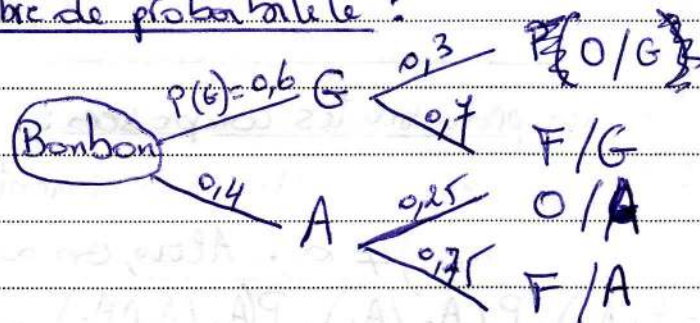
Exemple: Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 bonbons acidulés

sont au parfum orange. des bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise. On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note :

- A l'événement " le bonbon est acidulé "
- G l'événement " le bonbon est à la guimauve "
- ~~O~~ l'événement " le bonbon est à l'orange "
- ~~F~~ l'événement " le bonbon est à la Fraise "

Quelle est la probabilité que ce bonbon soit à la fraise?

Arbre de probabilité :



$$P(G) = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4$$

$$P(O/G) = \frac{18}{60} = 0,3$$

$$P(F/G) = \frac{42}{60} = 1 - 0,3$$

$$P(O/A) = \frac{10}{40} = 0,25$$

$$P(F/A) = \frac{30}{40} = 0,75$$

des événements G et A forment un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(F/G) \cdot P(G) + P(F/A) \cdot P(A) = 0,7 \times 0,6 + 0,75 \times 0,4 = 0,72$$

d) Formule de Bayes

Propriété 1 : Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles. On a $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

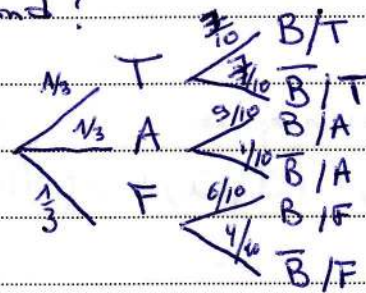
Dém : On a $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

Propriété 2 : Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et A un événement de probabilité non nulle. On a : $P(E_i/A) = \frac{P(A/E_i) \cdot P(E_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/E_i) \cdot P(E_i)}$

Exemple: Une population est constituée de 10 Tunisiens, 10 allemands et 10 Français.

- 7 Tunisiens sont bruns, 3 blonds
- 1 allemand est brun, 9 blonds
- 4 Français sont bruns, 6 blonds

On rencontre un blond, quelle est la probabilité qu'il soit Allemand?



B: "Il est blond"

T: "Tunisien"

A: "Allemand"

F: "Français"

$$P(T) = P(A) = P(F) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} ; P(B/T) = \frac{3}{10}, P(\bar{B}/T) = \frac{7}{10}$$

$$P(B/A) = \frac{1}{10}, P(\bar{B}/A) = \frac{9}{10}, P(B/F) = \frac{4}{10}, P(\bar{B}/F) = \frac{6}{10}$$

D'après la formule de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B/A) \cdot P(A) + P(B/T) \cdot P(T) + P(B/F) \cdot P(F)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{18} = \frac{1}{2}$$

e) Indépendance d'événements:

Def: On dit que deux événements A et B sont indépendants

si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

On a donc $P(B/A) = P(B)$ et $P(A/B) = P(A)$

Propriété: si A et B sont deux événements indépendants, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$ et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Def: Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, n événements.

On dit que les événements sont indépendants, si

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Remarque: Il est essentiel de bien réaliser la différence entre événements incompatibles (ou disjoints) $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ et événements indépendants $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.