

Série 1 : Graphes simples

Exercice 1 :

Trois professeurs P1 , P2 , P3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C1 ; C2 , C3 :

- P1 doit donner 2 heures de cours à C1 et 1 heure à C2;
- P2 doit donner 1 heure de cours à C1 , 1 heure à C2 et 1 heure à C3;
- P3 doit donner 1 heure de cours à C1 , 1 heure à C2 et 2 heures à C3.

1. Comment représenter cette situation par un graphe ?
2. Quel type de graphe obtenez-vous ?
3. Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum ?
4. Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

Exercice 2 :

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Quel type de graphe obtenez-vous ?
3. Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?
4. Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Exercice 3 :

On considère le graphe simple G défini sur $S(G) = \{1, \dots, 6\}$ par :

$$A(G) = \{\{x, y\} \in \binom{S(G)}{2} ; x \text{ divise } y\}$$

1. Construire le graphe G .
2. Donner $V_G(x)$ pour tout $x \in \{1, \dots, 6\}$.
3. Donner le degré de chaque sommet de G .

Exercice 4 :

Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 5 :

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Exercice 6 :

On s'intéresse aux graphes réguliers de degré 3.

1. Quel est le nombre minimum de sommets que doit posséder un graphe régulier de degré 3 ?
2. Construire, s'il est possible, de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets.
3. Que déduisez-vous ? Prouvez-le.

Exercice 7 :

Soit G un graphe simple d'ordre 12 à 14 arêtes dont les sommets sont de degré 2 ou 3. Donner le nombre de sommets de degré 2 ainsi que le nombre de sommets de degré 3.

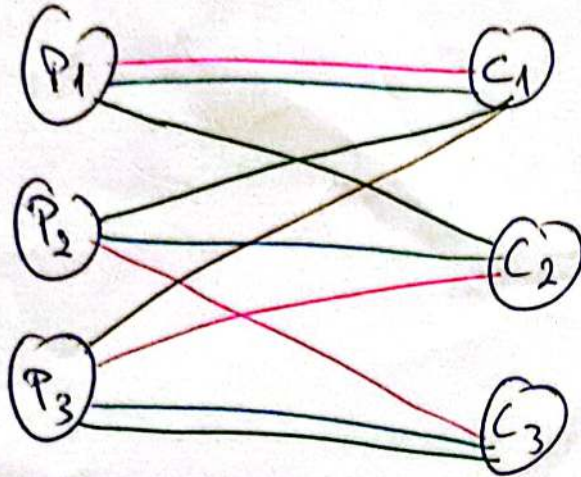
Exercice 8 :

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe au moins deux sommets distincts de G qui ont le même degré.
2. En déduire que dans une assemblée de n personnes, il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis dans cette assemblée.

Serie N° 1

Ex 1: Soit $G = (V, E)$ un graphe avec
 V : L'ensemble des sommets : P_1, P_2, P_3, C_1, C_2 et C_3
 E : arêtes : 1 h = 1 arête.



e) C'est un graphe bipartite.

3) Il faut 4 relances.

4)

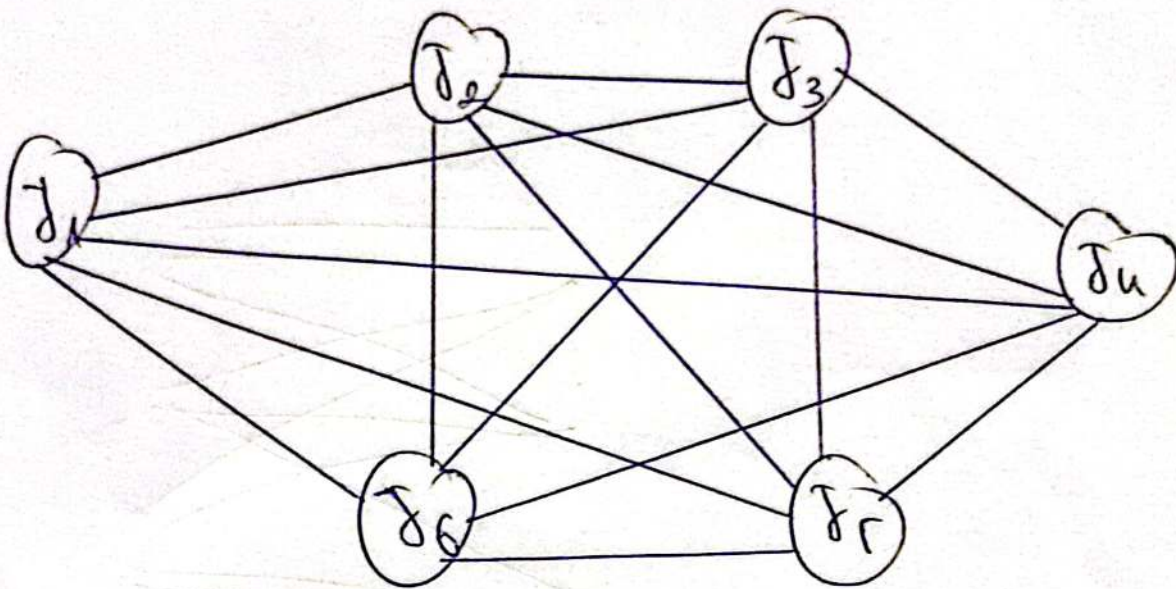
	S_1	S_2	S_3	S_4
P_1	C_1	C_1	C_2	
P_2	C_3	C_2	C_1	
P_3	C_2	C_3	C_3	C_1

①

Ex 2°, Soit $G = (V, E)$ un graphe simple avec :

V : l'ensemble des sommets : joueurs $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$

E : " " arêtes : 1 arête = 1 partie.



2) C'est un graphe complet.

3) Chaque joueur doit affronter tous les autres
donc ~~d~~ $d(\delta_i) = 5$ **imp.**

De plus le graphe est complet tq $|V| = n = 6$

$$\text{Alors } d(\delta_i) = n - 1 = 6 - 1 = 5$$

4) D'après Lemme des poignées des mains : (2)

$$\sum_{\delta_i \in V} \underbrace{d(\delta_i)}_5 = 2 \times |E| \Rightarrow \sum_{\delta_i \in V} 5 = 2 \times |E|$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{5 \times 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

"5 x |V| = 2 x |E|"

Donc on a 15 parties.

D'autre part: chaque joueur ne joue qu'un match par jour ~~alors~~ on peut réaliser 3 match par jour

par suite: $\frac{15}{3} = 5$ jours pour terminer le tournoi.

4)

Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
$\delta_1 - \delta_2$	$\delta_1 - \delta_3$	$\delta_1 - \delta_4$	$\delta_1 - \delta_5$	$\delta_1 - \delta_6$
$\delta_3 - \delta_4$	$\delta_4 - \delta_6$	$\delta_2 - \delta_6$	$\delta_2 - \delta_4$	$\delta_2 - \delta_3$
$\delta_5 - \delta_6$	$\delta_2 - \delta_5$	$\delta_3 - \delta_5$	$\delta_3 - \delta_6$	$\delta_4 - \delta_5$

Ex3: soit $G=(V,E)$ un graphe simple ave:

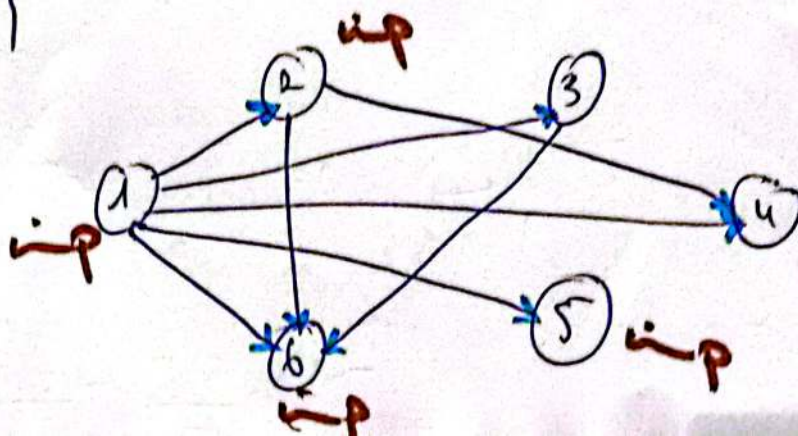
V : l'ensemble des sommets: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E : " arêtes.

$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{1, 5\}; \{1, 6\}$

$\{2, 4\}; \{2, 6\}$

$\{3, 6\}$



Ex 1.5 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple avec :

V : l'ensemble des sommets

E : " " " " arêtes.

P / Π

Soit P : l'ensemble des sommets de degré pair

Π : " " " " " " impair

$$V = P \cup \Pi.$$

D'après lemme des poignées des mains.

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2 \times |E|$$

$$\Rightarrow \sum_{v_i \in P} d(v_i) + \sum_{v_i \in \Pi} d(v_i) = 2 \times |E|$$

$$\Rightarrow \sum_{v_i \in \Pi} d(v_i) = 2 \times |E| - \sum_{v_i \in P} d(v_i)$$

or $2 \times |E|$ est pair de même $\sum_{v_i \in P} d(v_i)$ est pair

Donc $\sum_{v_i \in \Pi} d(v_i)$ est également pair,

puisque c'est la différence de deux entiers pairs.

Or chaque terme de la somme $\sum_{v_i \in \Pi} d(v_i)$ est impair

Elle ne peut donc être pair que si le nombre des termes est pair.

On a ainsi montré que le cardinal de Π est un entier

Ex 5: Considérons le graphe simple dont les sommets représentent les 15 ordinateurs, les arêtes représentent les liaisons entre ces ordinateurs.

Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair.

D'après le résultat établi dans l'ex 4 un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau est donc impossible.

Ex 6:

On s'intéresse aux graphes réguliers de degré 3. Un graphe est dit régulier si tous les sommets ont le même degré.

Ici, pour tout $x \in S$: $d(x) = 3$.

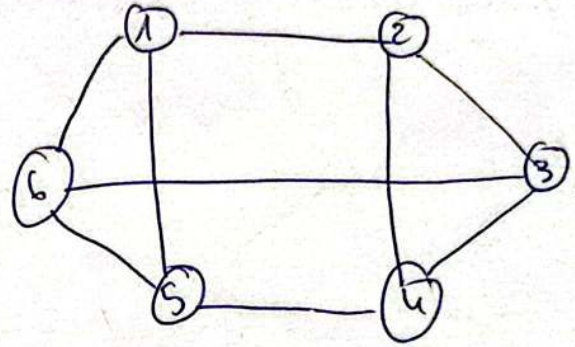
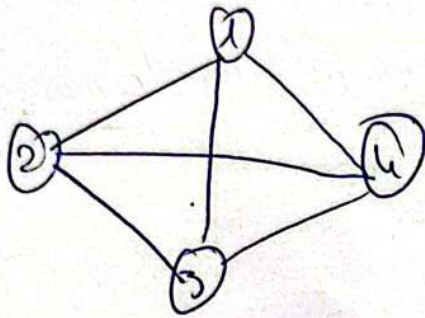
(5)

1) On sait que pour chaque graphe simple G d'ordre n

$$0 \leq d(x) \leq n-1$$

Donc un graphe régulier de degré 3 possède au moins 4 sommets.

2) En essayant de construire ces graphes, on peut constater qu'on puisse seulement dessiner de tels graphes d'ordre 4 ou 6.



Graphes avec 4 sommets

3) On peut deduire qu'il n'existe pas des graphes reguliers de degre 3 d'ordre impair.

La preuve: c'est par le lemme des poignées des mains

$$\sum_{v_i \in V} \underline{d(v_i)} = 2 \times |E| \text{ où } |E| \text{ est le nombre d'arêtes}$$

$$3 \times |V| = 2 \cdot |E|$$

$|V|$ " " " des sommets

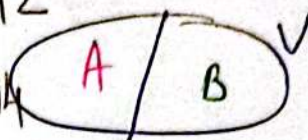
$$\Rightarrow |V| = 2 \times \frac{|E|}{3} \Rightarrow |V| \text{ est pair.}$$

entier

6

ExA: Soit G un graphe simple $G = (V, E)$.
avec V : l'ensemble des sommets $|V| = 12$

E : " " arêtes. $|E| = 14$



soit A : l'ensemble des sommets de degré 2

B : " " " " 3

$$V = A \cup B$$

$$\Rightarrow \underbrace{|V|}_{12} = |A| + |B| \Rightarrow \boxed{|A| + |B| = 12} \quad (1)$$

D'autre part:

D'après le lemme des poignées des mains:

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2 \times \underbrace{|E|}_{14} = 28$$

$$\sum_{v_i \in A} \underbrace{d(v_i)}_2 + \sum_{v_i \in B} \underbrace{d(v_i)}_3 = 28$$

(7)

$$\boxed{2 \times |A| + 3 \times |B| = 28} \quad (2)$$

Donc, on a un système de deux équations

$$\begin{cases} |A| + |B| = 12 \\ 2|A| + 3|B| = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 8 \\ |B| = 4 \end{cases}$$

le graphe admet donc 8 sommets de degré 2
et 4 sommets de degré 3.

Ex 8: Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 2$

1) Montre qu'il existe $x \neq y$ tq $d(x) = d(y)$
on suppose par l'absurde que $\forall x \neq y$, $d(x) \neq d(y)$

Donc, les degrés possibles des n sommets de G sont :

$0, 1, \dots, n-1$ puisqu'ils sont tous différents
ceci est impossible car :

↳ il y a un sommet de degré 0 c.-à-d. n'est pas relié à aucun sommet

↳ et un autre sommet de degré $n-1$ c.-à-d. relié à tous les autres sommets

absurde.

2) On prend le graphe G dont les sommets sont les n personnes et les arêtes sont les personnes qui sont amis ~~avec~~.

D'après 1) ; il existe $x \neq y$ tel que $d(x) = d(y)$
et $d(x)$ représente le nombre d'amis de x .

Donc, il existe au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis.

8