

TD2 : Algorithme du simplexe

Exercice 1 : Résoudre les programmes linéaires suivants :

$$(PL1) \begin{cases} \max[Z(x) = 4x_1 + 3x_2] \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases} \quad (PL2) \begin{cases} \min[Z(x) = -6x_1 - 8x_2] \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

$$(PL3) \begin{cases} \max[Z(x) = \frac{1}{2}x_1 + x_2] \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases} \quad (PL4) \begin{cases} \max[Z(x) = 2x_1 + 2x_2] \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 4 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

$$(PL5) \begin{cases} \min[Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5] \\ 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 5 \\ 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 3x_5 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0_{\mathbb{R}^5} \end{cases}$$

$$(PL6) \begin{cases} \min[Z(x) = -8x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 5x_5] \\ 6x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 2x_4 - 8x_5 \geq 3 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0_{\mathbb{R}^5} \end{cases}$$

$$\Delta (PL7) \begin{cases} \max[Z(x) = x_1 - x_2] \\ -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases} \quad (PL8) \begin{cases} \min[Z(x) = x_1 - x_2] \\ -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

$$(PL9) \begin{cases} \max[Z(x) = 2x_1 + 18x_2 + 5x_3 + 14x_4] \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 + 8x_4 = 7 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 8 \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0_{\mathbb{R}^4} \end{cases}$$

(PL10) même problème que (9) en remplaçant le second membre $b_3 = 8$ par $b_3 = 10$.

Exercice 2 : On considère le (PL) suivant :

$$(PL) \begin{cases} \max[Z(x) = x_1 + x_2 + 4x_3] \\ x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ x_2 + 4x_3 \leq 4 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$$

1. Montrer que $x^{(0)} = (4, 4, 0)$ est un sommet du domaine réalisable.
2. Ecrire ce (PL) sous forme standard, puis donner la solution de base réalisable $y^{(0)}$ associée à $x^{(0)}$.
3. Résoudre ce (PL) par la méthode du simplexe en prenant point initial $y^{(0)}$.

Exercice 3 : On considère la forme canonique suivante :

$$(FC) \begin{cases} \max[Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3] \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 \leq 420 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \geq 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$$

1. Ecrire cette (FC) sous forme standard (FS), puis montrer que le point

$$y^{(0)} = (0, 0, 230, 200, 0, 420)$$

2. Déterminer le sommet $x^{(0)}$ de (FC) relatif à $y^{(0)}$.
3. Résoudre ce problème par la méthode du simplexe en prenant comme point initial $y^{(0)}$.

Exercice 4 : Un agriculteur dispose d'une superficie cultivable de 50 ha. Les légumes cultivés sont les tomates qui se vendent à 0,500 DT le Kg, les laitues qui se vendent à 0,350 DT la pièce et le persil qui se vend à 0,295DT la livre (une livre = $\frac{1}{2}$ Kg). Les rendements annuels par ha sont respectivement de 2 tonnes, 400 pièces et 2 tonne pour les tomates, la laitue et le persil. Pour obtenir ces résultats, il faut employer des engrais à raison de 100kg/ ha pour les tomates et les laitues et à raison de 50 Kg/ha pour le persil. D'autre part, l'agriculteur doit employer des ouvriers pour une journée pour les travaux d'aménagement du sol, une deuxième journée pour la semence et une dernière pour la récolte. Ces 3 activités demandent respectivement 10 ouvriers / jour par ha pour les tomates, de 20 ouvriers / jour par ha pour les laitues et de 6 ouvriers /jour par ha pour le persil. Compte tenu des disponibilités locales en main d'oeuvre, l'agriculteur ne peut employer que 400 ouvriers par jour.

L'engrais revient à 5DT le Kg et le cout d'un ouvrier/jour est de 7DT. On pose respectivement x_1 , x_2 et x_3 les superficies cultivées pour les tomates, les laitues, et le persil.

1. a- Déterminer en fonction des variables x_i , le cout annuel de la main d'oeuvre et des engrais.
 b- Même question pour le gain annuel dû à cette exploitation.
 c- En déduire en fonction des variables x_i le bénéfice annuel net.
2. a- Modéliser le problème qui consiste à déterminer le meilleur programme de production.
 b- Déterminer la stratégie optimale de production à l'aide de la méthode du simplexe.
 c- Cette stratégie optimale est-elle unique ? Sinon, proposer une deuxième stratégie optimale.
 d- En déduire toutes les stratégies optimales de production.
3. Peut-on améliorer le programme si on dispose de 200 ouvriers, jour de main d'oeuvre supplémentaire ? Justifier votre réponse.

Exercice 1 : Au cours d'une itération du simplexe, on dispose du tableau suivant :

	y_2	y_3	y_5	
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	4	y_1
$-\frac{7}{3}$	3	$-\frac{2}{3}$	2	y_4
$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$	2	y_6
$\frac{8}{3}$	-11	$\frac{4}{3}$	8	

1. Déterminer le problème initiale relatif à ce tableau.
2. On suppose que

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } c_B^* = (\alpha \ -3 \ 1)$$

- a. Calculer α .
- b. Trouver c .
- c. Déterminer le problème initial.
3. a. Démontrer que les deux problèmes trouvés dans les questions (1) et (2) sont équivalents.
 b. Résoudre le problème par le simplexe.
 c. Ecrire le problème relatif au dernier tableau.