

Département: Mathématiques	Examen
Epreuve de : Théorie des graphes et optimisation	Date : 03/ 01 /2024
Enseignante : S.Chahdoura	Durée : 1h30min
Classe : LCE2 & LCS2	Documents Non autorisés

Exercice 1 : (7 pts)

On considère le problème linéaire (PL) suivant :

$$(PL) \begin{cases} \max[Z(x) = 3x_1 + x_2] \\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 - x_2 \leq -3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x = (x_1, x_2) \geq 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

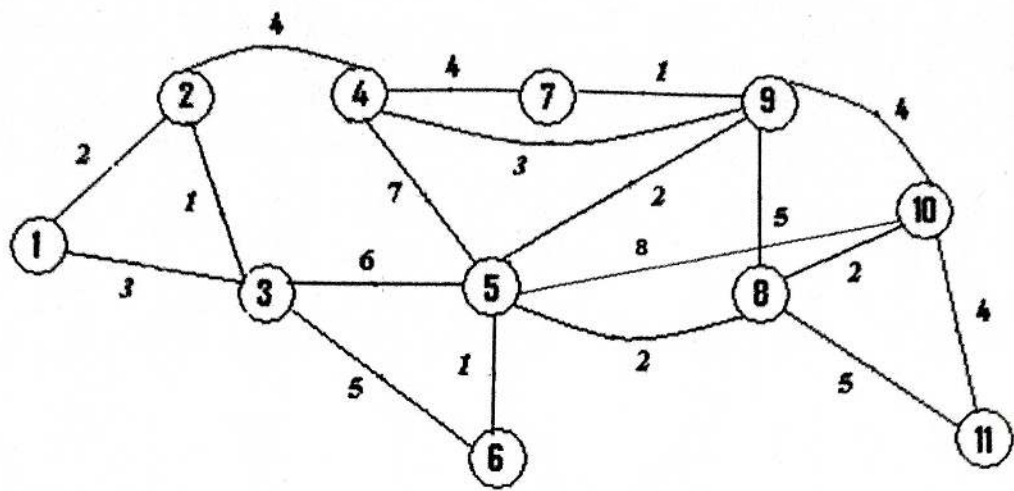
1. Ecrire le programme linéaire sous forme standard.
2. Résoudre ce (PL) par la méthode de deux phases.
3. Cette stratégie est-elle unique, justifier votre réponse.

Exercice 2 : (4.5 pts)

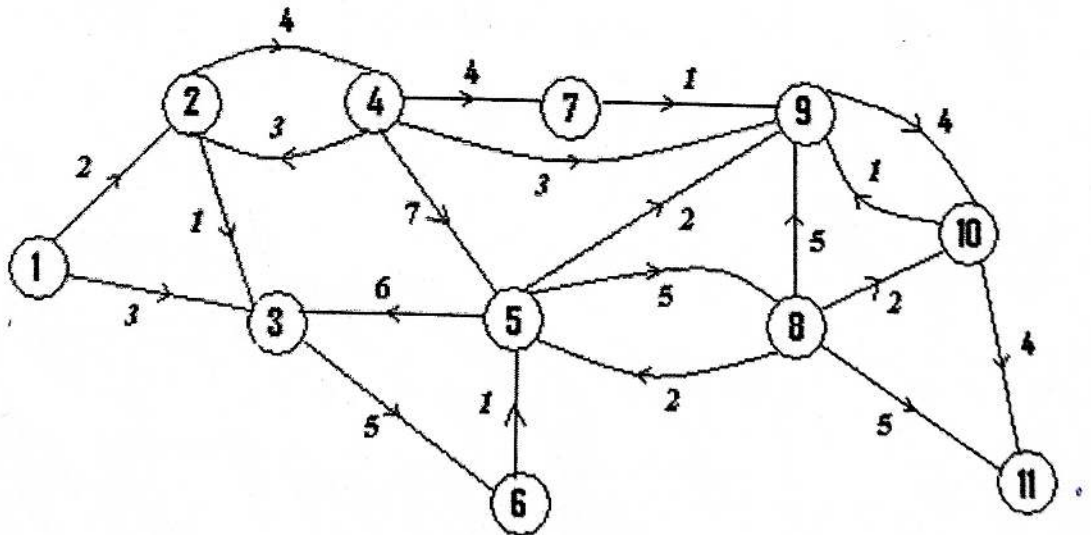
1. Enoncer le lemme des poignées de mains.
2. Montrer que dans un graphe simple complet d'ordre $n \geq 2$, le nombre d'arêtes est $\frac{n(n-1)}{2}$.
3. Combien d'arêtes contiennent le graphe complet K_{11} (d'ordre 11)?
4. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $2p$ tel que chacun de ses sommets est de degré au moins p .
Montrer que ce graphe est connexe.

Exercice 3 : (9pts)

Soit le graphe non orienté suivant :



1. Donner le diamètre du graphe.
2. a) Ecrire la matrice et la liste d'adjacence.
b) Donner la matrice des poids.
3. Sans donner les chaînes, combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du sommet 5 au sommet 9 en deux étapes ? Justifier la réponse.
4. Est-il possible de partir d'un sommet et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ? Justifier votre réponse.
5. Afin de rendre le graphe plus lisible, on souhaite colorer les sommets du graphe de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.
 - a) Peut-il utiliser seulement deux couleurs ? Justifier.
 - b) Donnez un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaire, en justifiant.
 - c) Donner une proposition, en utilisant l'algorithme de Welsh et Powell.
6. On considère maintenant le graphe orienté suivant :



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet 1 au sommet 11.