

Coloration des sommets :

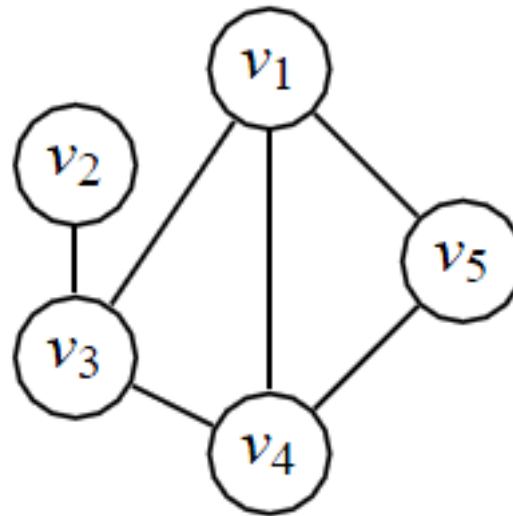
Définition :

Un stable, appelé aussi ensemble indépendant, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

- La taille d'un stable est égale au nombre de sommets qu'il contient.
- Un ensemble stable maximum est un ensemble stable de cardinalité maximum.
- Le nombre de stabilité d'un graphe noté $\alpha(\mathbf{G})$ est la cardinalité d'un stable maximum.

Coloration

- Soit $G = (V, E)$ un graphe.
- Dans le graphe ci-dessous, $\{v_1, v_2\}$ forment un stable ; aussi $\{v_2, v_4\}$, ainsi que $\{v_2, v_5\}$ et $\{v_3, v_5\}$.
- Le cardinal du plus grand stable est le nombre de stabilité de G . Dans le graphe ci-dessous, on a $\alpha(G)=2$.

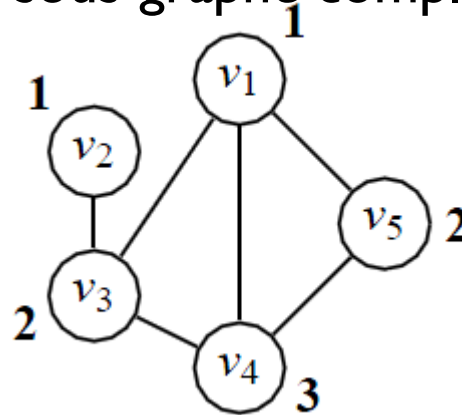


Coloration

- La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter à tous les sommets de ce graphe une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
- Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k stables.
- Le nombre chromatique du graphe G , noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de V en k sous-ensembles stables.

Coloration

- Sur le graphe ci-dessous, on a eu besoin de trois couleurs (notées 1, 2 et 3) pour colorer les sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.
- On a donc trois stables : $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_5\}$ et $\{v_4\}$. On ne peut pas utiliser moins de 3 couleurs, à cause des cliques $\{v_1, v_4, v_5\}$ et $\{v_1, v_3, v_4\}$.
- Rq : On appelle **clique** un sous-graphe complet de G .



Remarque : on peut colorer le sommet v_2 par la couleur « 3 ». La coloration minimale n'est donc pas forcément unique.

Coloration des sommets :

Le **nombre chromatique** d'un graphe est le nombre **minimal** de couleurs permettant de le colorer, on le note par $\gamma(G)$.

Théorème :

Le théorème de Brooks établit qu'on peut colorer un graphe connexe en utilisant au maximum Δ couleurs, où Δ est le degré maximal du graphe, à l'exception des cas du graphe complet et du graphe cycle de longueur impaire, il faut $\Delta + 1$ couleurs,

Théorème :

$\gamma(G) \leq \Delta + 1$; où le plus grand degré de ses sommets.

Coloration : nombre chromatique

Théorème :

$$\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

Preuve :

Considérons S un stable de V de cardinal $\alpha(G)$: une coloration possible des sommets consiste à colorer les sommets de S d'une même couleur et les $n - \alpha(G)$ autres sommets de couleurs toutes différentes. On en déduit que $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.

Minoration

- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.
- Le nombre chromatique du graphe sera supérieur ou égal à l'ordre de sa plus grande clique.

Algorithme de coloration de Welsh et Powell

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un grand nombre des couleurs.

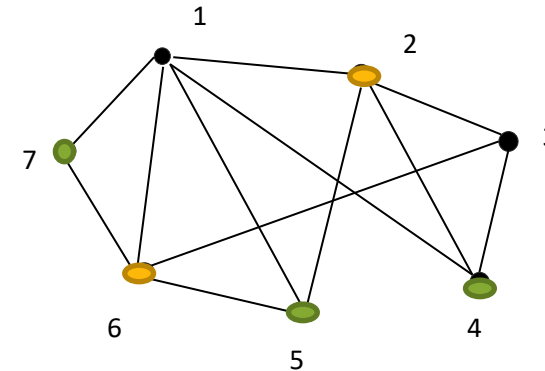
Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

- 1) Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré,
- 2) On colore le premier sommet de la liste (couleur A).
- 3) En parcourant la liste dans l'ordre, on colore tous les sommets de celle-ci qui ne sont pas adjacents au premier sommet coloré avec la même couleur A, sauf si eux-mêmes sont adjacents entre eux. On ne colore alors que le premier de ces sommets adjacents entre eux qui se présente dans la liste.
- 4) on revient en arrière dans le tableau et on s'intéresse au premier sommet de la liste non coloré. On le colore d'une deuxième couleur B.
- 5) On colore de la même couleur B les sommets non encore colorés qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.
- 6) On revient en arrière comme à l'étape 4, et on continue ainsi par l'étape 6 jusqu'à ce que tous les sommets soient colorés,

Algorithme de coloration de Welsh et Powell : Exemple

- 1) On colore le sommet 1 en noir.
- 2) Dans la liste qui suit, seul le 3 ne lui est pas adjacent, On colore le 3 en noir,
- 3) On revient en arrière. Le premier sommet non coloré est le 2. On le colore en jaune.
- 4) Le 6 et le 7, non encore colorés, ne sont pas adjacents au 2 mais le sont entre eux. On ne colorera donc le 6 en jaune.
- 5) On revient en arrière. Le premier sommet non coloré est le 4. On le colore en vert.
- 6) Le 5 et le 7, derniers de la liste et non encore colorés, ne lui sont adjacents et ne sont pas adjacents entre eux. On peut donc les colorer tous les deux en vert comme le 4.
- La coloration est terminée.

Sommet	1	2	6	3	4	5	7
Degré	5	4	4	3	3	3	2
Couleurs	N	J	J	N	V	V	V



Coloration

Graphes parfaits

- Dans le cadre de la théorie des graphes, Claude Berge a introduit en 1960 la notion de graphe parfait comme définissant un graphe pour lequel le nombre chromatique de chaque sous-graphe induit et la taille de la plus grande clique dudit sous-graphe induit sont égaux.
- Un graphe G est donc parfait si pour tout sous-graphe induit G' de G on a $\chi(G') = \omega(G')$.

Coloration des sommets d'un graphe planaire

Théorème (Théorème des quatre couleurs) (Kenneth A. et Wolfgang H., 1976)

On peut colorer les sommets d'un graphe planaire (sans boucles) en utilisant au plus quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.