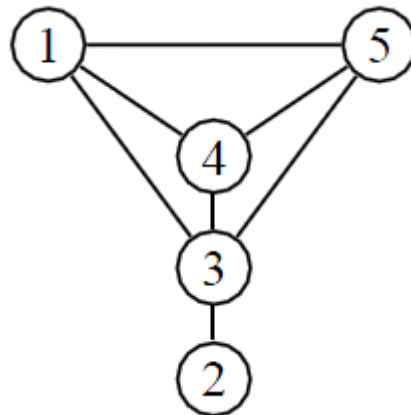


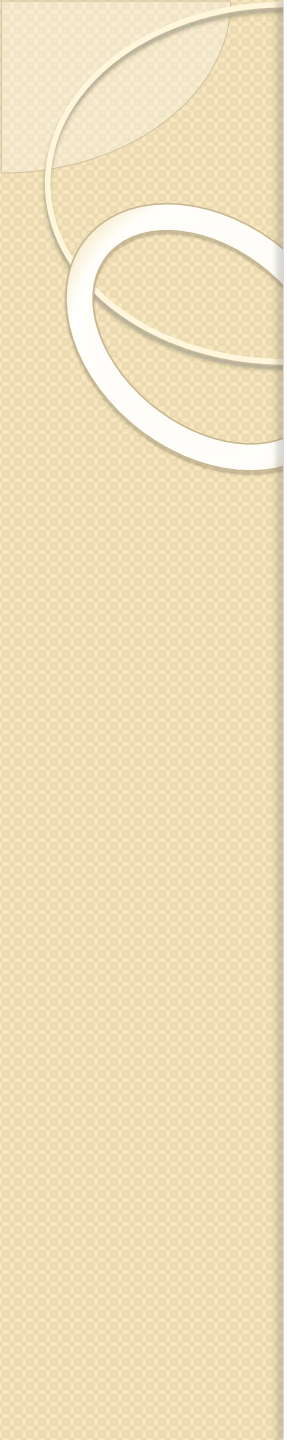
Représentations non graphiques d'un graphe

Matrice d'adjacences

- On peut représenter un graphe simple par une matrice d'adjacences.
- Une matrice $(n \times m)$ est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j .
- Dans une matrice d'adjacences, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Un « 1 » à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j .



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



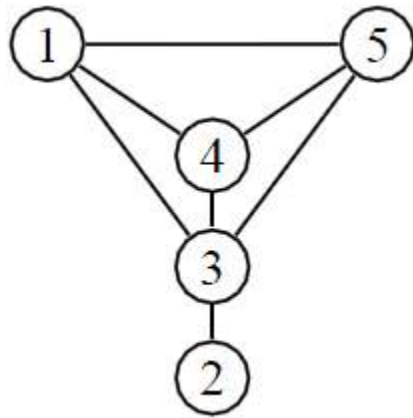
Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

- 1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
- 2. Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un « 1 » sur la diagonale indiquerait une boucle.
- 3. Elle est symétrique : $m_{ij} = m_{ji}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
- 4. Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe.

Représentations non graphiques d'un graphe

Listes d'adjacences

- On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste des sommets auxquels il est adjacent. Ce sont les listes d'adjacences.



1 : 3, 4, 5

2 : 3

3 : 1, 2, 4, 5

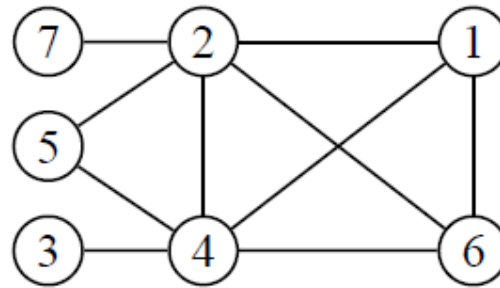
4 : 1, 3, 5

5 : 1, 3, 4

Représentations non graphiques d'un graphe

Exercice :

Décrivez le graphe G ci-dessous par une matrice d'adjacences et des listes d'adjacences.



Solution

Matrice et listes d'adjacences :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 : 2, 4, 6

2 : 1, 4, 5, 6, 7

3 : 4

4 : 1, 2, 3, 5, 6

5 : 2, 4

6 : 1, 2, 4

7 : 2

Représentations non graphiques d'un graphe

Matrice associée a un graphe orienté :

Le principe est le même :

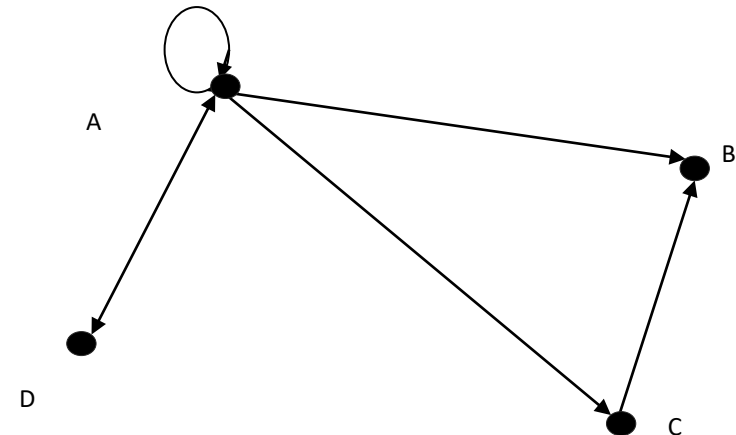
- Lorsque deux sommets sont reliés par un arc, le terme correspondant de la matrice est égal à 1,
- Lorsqu'ils ne sont pas adjacents, le terme correspondant de la matrice est égal à 0.

Remarque :

Les arcs sont par définition orientés donc la matrice ne **sera pas symétrique**.

Exemple : La matrice associée

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



8. Représentations non graphiques d'un graphe

Exercice : Ci-dessous on peut voir quatre matrices certaines correspondent à des graphes orientés, d'autres non. Lesquelles et pourquoi ? Justifier la réponse

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse :

8. Représentations non graphiques d'un graphe

Exercice : Ci-dessous on peut voir quatre matrices certaines correspondent à des graphes orientés, d'autres non. Lesquelles et pourquoi ? Justifier la réponse

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse :

M1 correspond à un graphe orienté car la matrice n'est pas symétrique, M1 est un multigraphe,

M2 correspond à un graphe non orienté car la matrice est symétrique, M2 est un graphe simple

M3 correspond à un graphe orienté car la matrice n'est pas symétrique, M3 est un graphe simple

et M4 correspond à un graphe non orienté car la matrice est symétrique, M4 est multigraphe,

Représentations non graphiques d'un graphe

- Utilisation des matrices :

Proposition : Soit M une matrice associée à un graphe G .

Le terme m_{ij} de M^n est égal au nombre des chaînes de longueur n reliant le sommet « i » au sommet « j ».

Exemple : Soit le graphe ci-contre,

La matrice associée est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ calculons } M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons en déduire :

- Une seule chaîne de longueur 3 du sommet 4 au sommet 3
- Aucun cycle de longueur 3 d'origine 4
- 3 chaînes de longueur 3 du sommet 4 au sommet 1.

