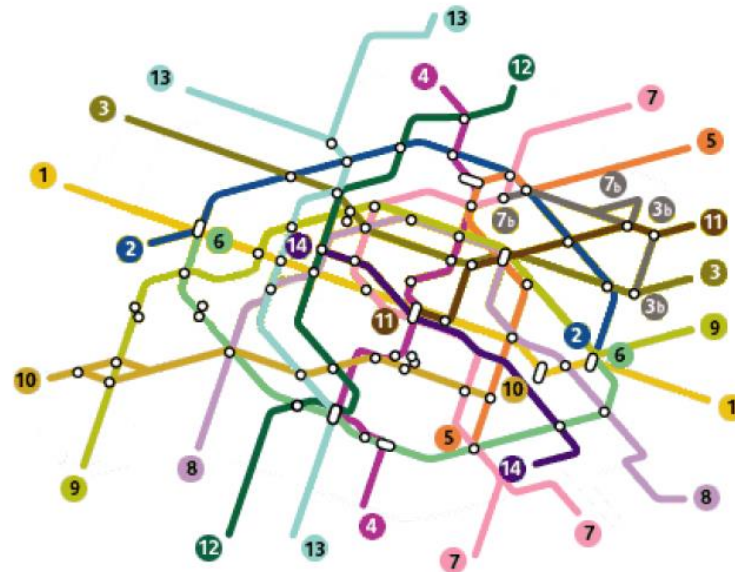


Théorie des Graphes et Optimisation

Partie I



Présentation du cours : Partie I

Pré-requis : --.

- **Objectifs :** Permet à l'étudiant d'acquérir les connaissances de base sur la théorie de graphe, leur permettant par la suite de comprendre les structures topologiques des réseaux informatiques et d'appliquer des algorithmes de recherche et d'optimisation.

Contenu :

- Graphe non orienté
- Quelques types de graphes
- Graphe partiel et sous-graphe
- Chaînes et cycles
- Graphes Eulériens
- Graphes Hamiltoniens
- Représentations non graphiques d'un graphe
- Coloration
- Graphes orientés
- Couplages
- Graphes planaires
- Recherche d'un parcours dans un graphe

Plan

Introduction

1.1. Représentation graphique

- 2. Quelques types de graphes
- 3. Graphe partiel et sous-graphe
- 4. Degrés
- 5. Chaînes et cycles
- 6. Graphes eulériens
- 7. Graphes Hamiltoniens
- 8. Représentations non graphiques d'un graphe
- 9. Couplages
- 10. Graphes planaires
- 11. Coloration
- 12. Recherche d'un parcours dans un graphe

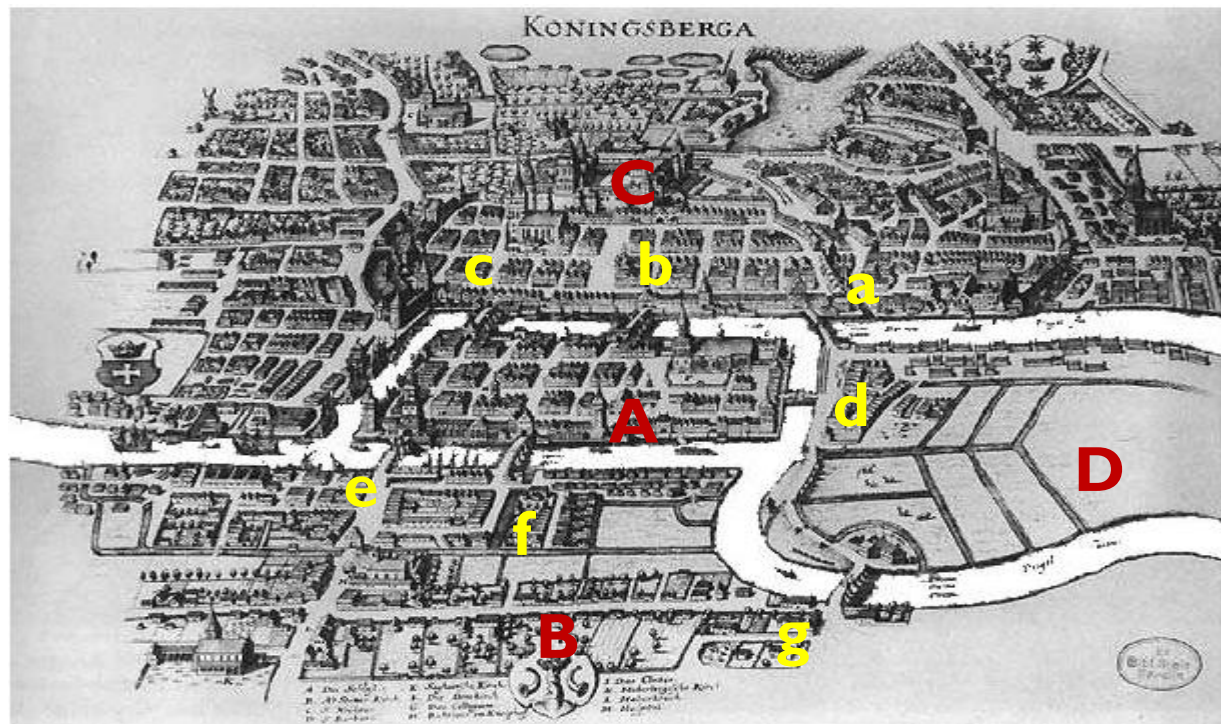
Démonstrations des théorèmes

Références

Un bref historique de la théorie des graphes :

Tout le monde s'accorde à considérer que la théorie des graphes est née en 1736 avec la communication d'Euler (1707-1783) dans laquelle il proposait une solution au célèbre problème des ponts Königsberg . Le problème posé était le suivant :

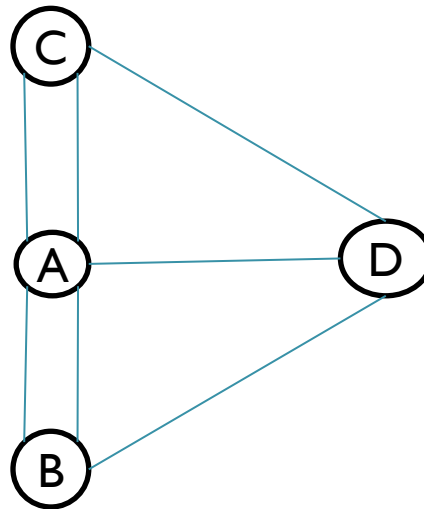
Deux îles A et D sur la rivière Pregel à Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) étaient reliées entre elles ainsi qu'aux rives B et C à l'aide de sept ponts. Le problème consistait, à partir d'une terre quelconque A, B, C ou D, à traverser chacun des ponts une fois et une seule et à revenir à son point de départ,



Königsberg en 1652

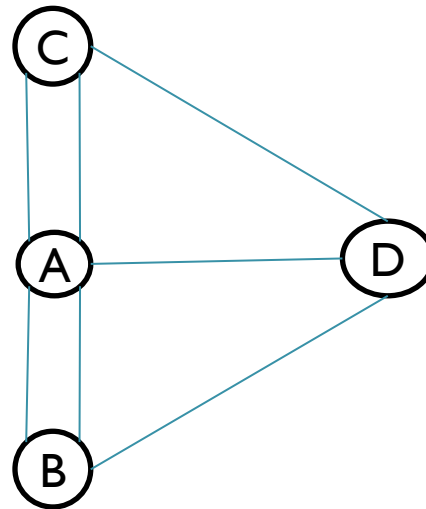
Solution :

Euler représente cette situation à l'aide d'un « dessin » où les sommets représentent les terres et les arêtes représentent les ponts, comme montre la figure 2



Solution :

Euler représente cette situation à l'aide d'un « dessin » où les sommets représentent les terres et les arêtes représentent les ponts, comme montre la figure 2



Il est possible de résoudre le problème si tous les sommets du graphe sont de degré pair.

Or, ce n'est pas le cas de notre graphe, donc ce n'est pas possible

Introduction

Les graphes permettent de manipuler plus facilement des objets et leurs relations avec une représentation graphique naturelle.

L'ensemble des techniques et outils mathématiques mis au point en théorie des graphes permet de démontrer facilement des propriétés, d'en déduire des méthodes de résolution, des algorithmes,....

Par exemple :

- Quel est le plus court chemin (en distance ou en temps) pour se rendre d'une ville à une autre ?
- Peut-on mettre une rue en sens unique sans rendre impossible la circulation en ville ?
- Comment organiser un horaire d'occupation ?
- Comment transporter des produits chimiques à moindre coût.
- Comment câbler le réseau à moindre coût?

...

Un graphe permet de décrire un ensemble d'objets et leurs relations, c'est-à-dire les liens entre les objets.

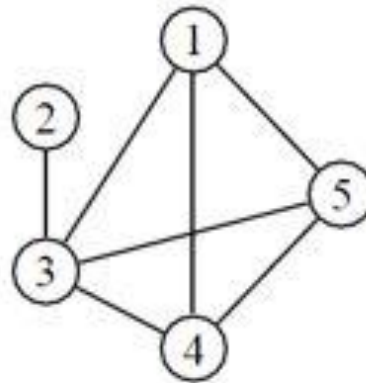
Définition d'un graphe (non orienté)

Un graphe fini $G = (V, E)$ est défini par :

- l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets** (Vertices en anglais),
- l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arêtes** (Edges en anglais).
- Une arête **e** de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de **e**.
- Si l'arête **e** relie les sommets a et b , on dira que ces sommets sont **adjacents**, ou **incidents** avec **e**, ou bien que l'arête **e** est **incidente** avec les sommets a et b .
- On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets n de ce graphe

Représentation graphique

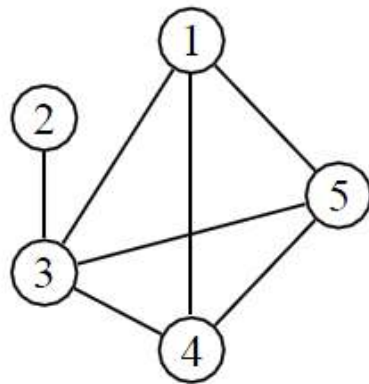
- **Les graphes** tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins.
- À chaque sommet de G , on fait correspondre un point distinct du plan et on relie les points correspondant aux extrémités de chaque arête.
- Il existe donc une infinité de représentations d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
- Si on peut dessiner un graphe G dans le plan sans aucune arête ne coupe une autre (les arêtes ne sont pas forcément rectilignes), on dit que G est **planaire**.
- Le graphe G ci-dessous est **planaire**.



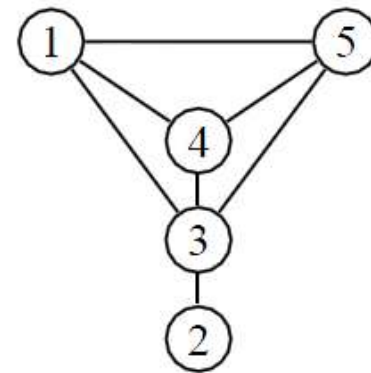
Une représentation non planaire du graphe G (des arêtes se croisent)

Représentation graphique

- **Les graphes** tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins.
- À chaque sommet de G , on fait correspondre un point distinct du plan et on relie les points correspondant aux extrémités de chaque arête.
- Il existe donc une infinité de représentations d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
- Si on peut dessiner un graphe G dans le plan sans aucune arête ne coupe une autre (les arêtes ne sont pas forcément rectilignes), on dit que G est **planaire**.
- Le graphe G ci-dessous est **planaire**.



Une représentation non planaire du graphe G (des arêtes se croisent)



Une représentation planaire de G

Degrés

Définition : Degré d'un sommet :

On appelle degré du sommet v , et on note $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

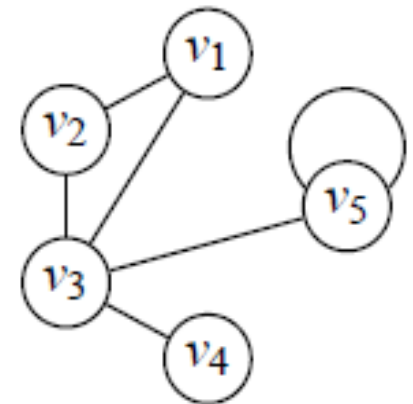
Définition :

- Une boucle est une arête qui relie un sommet à lui-même.
- Un graphe est dit simple, s'il ne contient pas de boucles et s'il n'y a pas plus d'une arête reliant deux mêmes sommets.

Attention ! Une boucle sur un sommet compte double.

Exemple :

Dans le multigraphe ci-contre, on a les degrés :



Degrés

Définition : Degré d'un sommet :

On appelle degré du sommet v , et on note $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Définition :

- Une boucle est une arête qui relie un sommet à lui-même.
- Un graphe est dit simple, s'il ne contient pas de boucles et s'il n'y a pas plus d'une arête reliant deux mêmes sommets.

Attention ! Une boucle sur un sommet compte double.

Exemple :

Dans le multigraphe ci-contre, on a les degrés :

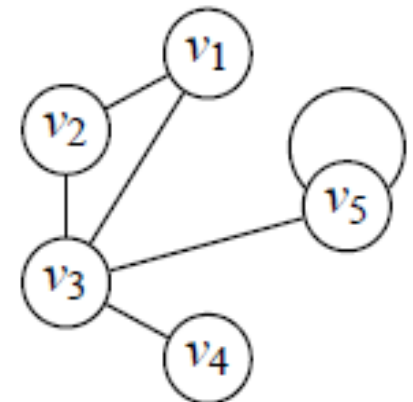
$$d(v_1) = 2$$

$$d(v_2) = 2$$

$$d(v_3) = 4$$

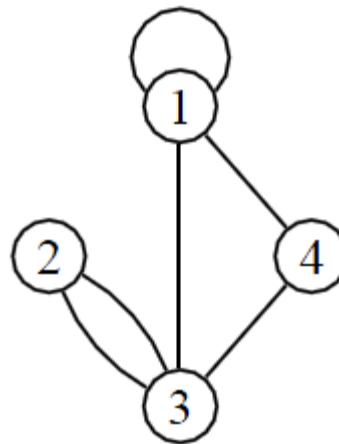
$$d(v_4) = 1$$

$$d(v_5) = 3$$



Définition : Graphe simple et Multi graphe :

- Un graphe est simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- On peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. On appellera ces graphes des multi graphes.



Multigraphe

Théorème I (Lemme des poignées de mains)

La somme des degrés des sommets d'un graphe simple est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Preuve : soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête (x, y) de E est comptée deux fois, une première fois pour $d(x)$ et une seconde fois pour $d(y)$. Donc, cette somme est finalement égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Exercice :

Exercice I

Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Solution

Notons P l'ensemble des sommets de degré pair et I l'ensemble des sommets de degré impair d'un graphe simple $G = (V, E)$. P et I forment une partition de V . D'après le lemme des poignées de mains, on a :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| = \sum_{v \in P} d(v) + \sum_{v \in I} d(v)$$

Or $2 \cdot |E|$ et $\sum_{v \in P} d(v)$ sont des entiers pairs. $\sum_{v \in I} d(v)$ est également pair, puisque c'est la différence de deux entiers pairs. Or, chaque terme de la somme $\sum_{v \in I} d(v)$ est impair. Elle ne peut donc être paire que si le nombre de termes est pair. On a ainsi montré que le cardinal de I est un entier pair.

Exercice 2

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

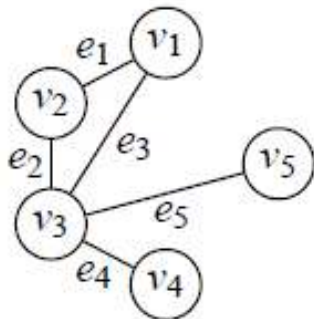
Solution

Considérons le graphe simple dont les sommets représentent les 15 ordinateurs ; les arêtes représentent les liaisons entre ces ordinateurs. Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair. D'après le résultat établi dans l'exercice 6, un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau est donc impossible.

Chaînes et cycles

Définitions :

- chaîne dans G , est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités.
- On dira que la chaîne relie le premier sommet de la suite au dernier sommet. En plus, on dira que la chaîne a pour longueur le nombre d'arêtes de la chaîne.
- Le graphe ci-dessous contient entre autres les chaînes $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5)$ et $(v_4, e_4, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$.



On ne change pas une chaîne en inversant l'ordre des éléments dans la suite correspondante.

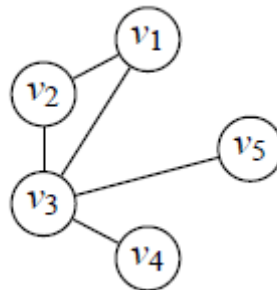
Ainsi, les chaînes $(v_1, e_3, v_3, e_4, v_4)$ et $(v_4, e_4, v_3, e_3, v_1)$ sont identiques.

Chaînes et cycles

Définition : Degré d'un graphe :

- Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

Dans l'exemple ci-dessous, le degré du graphe est 4, à cause du sommet v_3 .

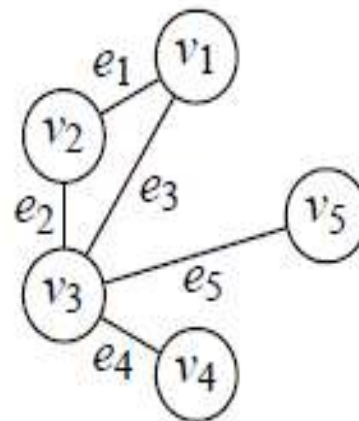


Définition : Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit **régulier**. Si le **degré commun** est k , alors on dit que le graphe est k -régulier.

Chaînes et cycles

Définition :

- On appelle **distance** entre deux sommets la longueur de la plus courte chaîne les reliant.
- On appelle **diamètre** d'un graphe la plus longue des distances entre deux sommets.



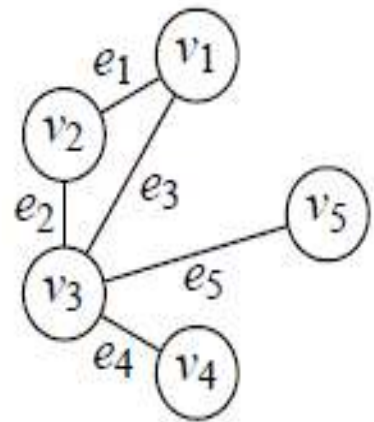
Chaînes et cycles

Définition :

- On appelle **distance** entre deux sommets la longueur de la plus courte chaîne les reliant.
- On appelle **diamètre** d'un graphe la plus longue des distances entre deux sommets.

Remarque :

- Le diamètre d'un graphe complet est égal à 1 car tous les sommets sont reliés entre eux par au moins une arête.
- Le diamètre d'un graphe qui n'est pas connexe est infini car il y a des sommets qui ne sont reliés par aucune chaîne.
La distance de ces sommets est donc infinie.



Chaînes et cycles

Définition :

Une chaîne est **élémentaire** si chaque sommet y apparaît au plus une fois.

Une chaîne est **simple** si chaque arête apparaît au plus une fois.

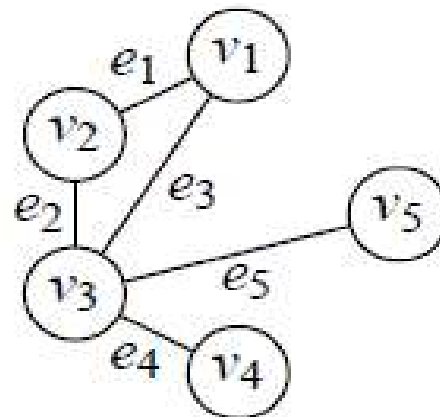
Dans le graphe précédent, $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$ est une chaîne simple et élémentaire.

Une chaîne dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes est appelée chaîne **fermée**.

Dans le graphe précédent, $(v_4, e_4, v_3, e_5, v_5, e_5, v_3, e_4, v_4)$ est une chaîne fermée.

Une chaîne fermée simple est appelée **cycle** si seul le sommet de départ apparaît deux fois dans la chaîne.

Dans le graphe précédent, la chaîne $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1)$ est un cycle.

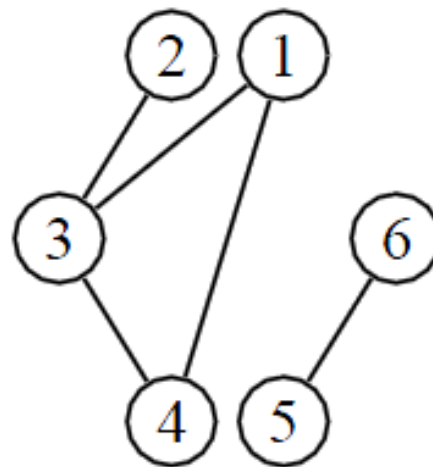


Graphe connexe, non connexe :

- Un graphe est connexe s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres sommets en suivant les arêtes.
- Un graphe non connexe se décompose en des composantes connexes.
- Sur le graphe ci-dessous, les composantes connexes sont $\{1,2,3,4\}$ et $\{5,6\}$.

Graphe non connexe

- $V = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $E = \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5,6\}$



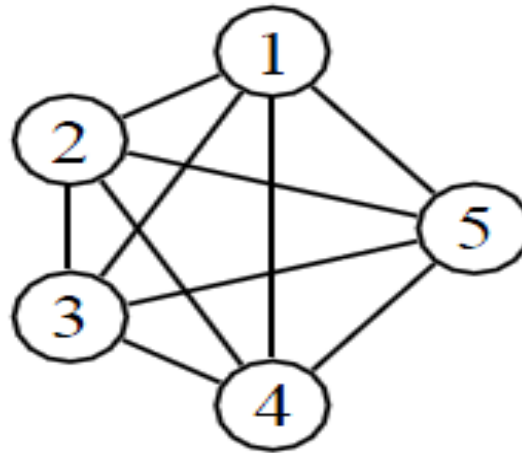
Graphe complet :

- Un graphe est complet si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.

Graphe complet k_5 .

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$

$$E = \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$$

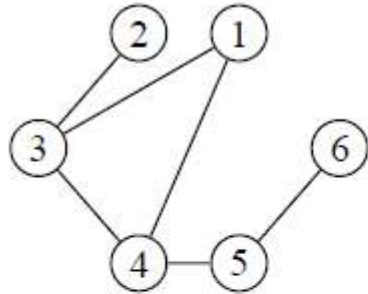


Graphe partiel et sous-graphe

Définition :

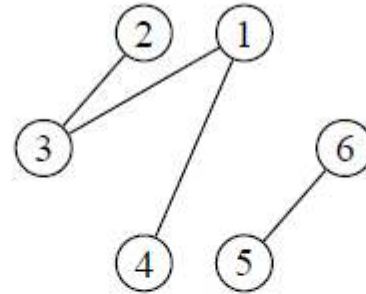
- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe $G' = (V, E')$ est un graphe partiel de G , si E' est inclus dans E . Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G .
- Pour un sous-ensemble de sommets A inclus dans V , le sous-graphe de G induit par A est le graphe $G = (A, E(A))$ dont l'ensemble des sommets est A et l'ensemble des arêtes $E(A)$ est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans A .
- Autrement dit, on obtient G' en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G , ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.

Graphe partiel et sous-graphe :



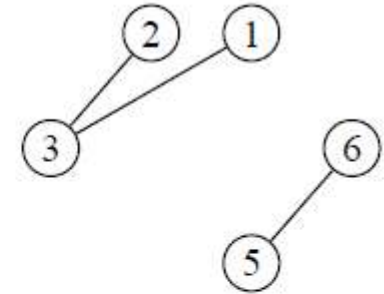
Graphe G

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$$



Graphe partiel de G

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$$



Sous-graphe de G

$$V = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$$

Un graphe partiel d'un sous-graphe est un sous-graphe partiel de G .

On appelle **clique** un sous-graphe complet de G .

Dans le graphe G ci-dessus, le sous-graphe $K = (V, E)$, avec $V = \{1, 3, 4\}$ et $E = \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}$ est une **clique**.

Graphe stable

Définition :

- Un stable, appelé aussi ensemble indépendant, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.
- La taille d'un stable est égale au nombre de sommets qu'il contient.
- Un ensemble stable maximum est un ensemble stable de cardinalité maximum.
- Le nombre de stabilité d'un graphe noté $\alpha(G)$ est la cardinalité d'un stable maximum.

Graphes eulériens

Définition :

- On appelle chaîne eulérienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G . Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi-eulérien.
- On appelle cycle eulérien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G . Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien.
- Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Remarque : L'adjectif « Eulérien » vient du nom du grand mathématicien Leonhard Euler,

Graphes eulériens

Théorème d'Euler :

Un graphe simple admet une chaîne eulérienne entre deux sommets a et b si et seulement si ce graphe est connexe et si a et b sont les seuls sommets de degré impair de ce graphe.

Les chaînes eulériennes du graphe auront alors ces deux sommets pour extrémités.

Théorème d'Euler :

- Un graphe simple admet un cycle eulérien si et seulement si ce graphe est connexe et s'il n'a aucun sommet de degré impair.

Corollaire d'Euler :

Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

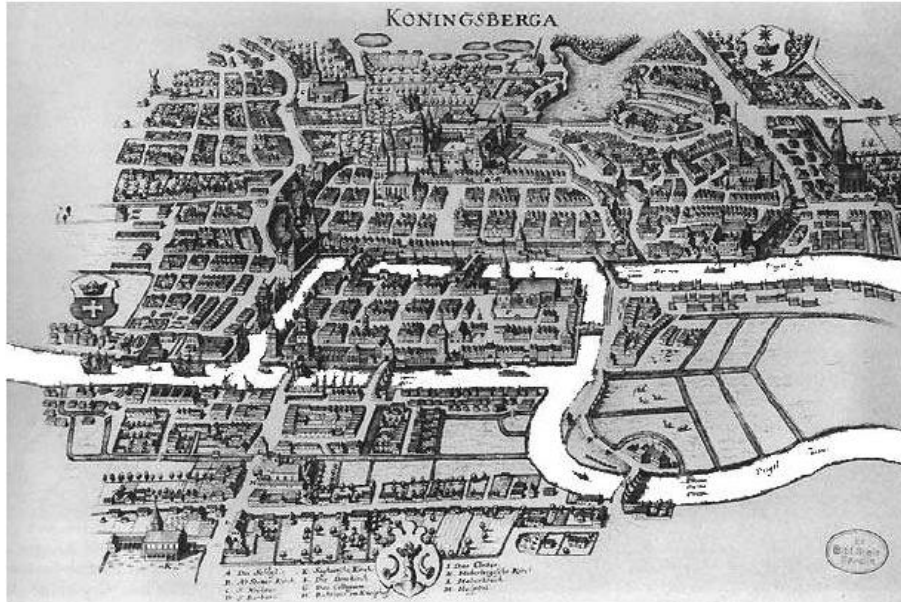
Graphes eulériens

Exercice :

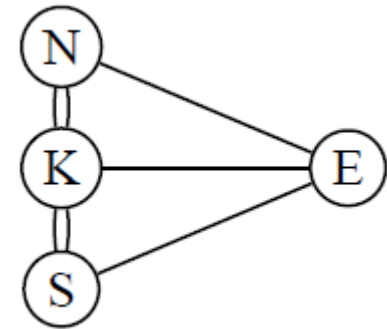
un des problèmes fondateurs de la théorie des graphes, proposé par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1736.

En 1652, la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) possède sept ponts enjambant la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof.

- Au cours d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville une et une seule fois ?



Königsberg en 1652



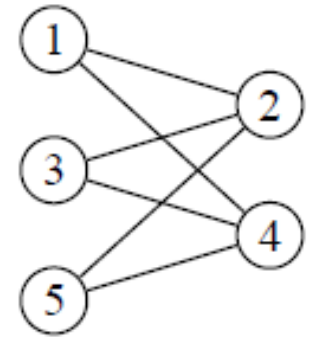
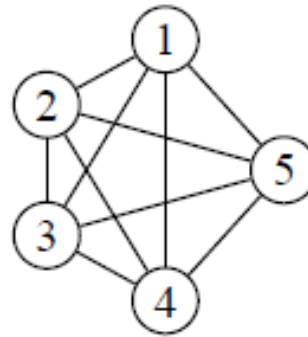
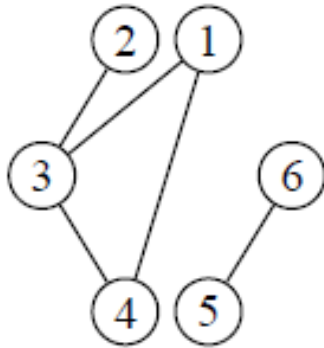
Solution

Non, il n'est ni eulériens ni semi eulériens

Graphes eulériens

Exercice :

Les graphes suivants sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?



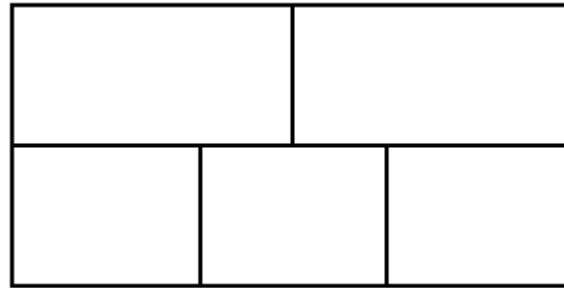
Solution

Le graphe de gauche n'est évidemment pas eulérien puisque non connexe. Celui du milieu est eulérien car tous les sommets sont de degré pair. Celui de droite est semi-eulérien, car seuls deux sommets sont de degré impair.

Graphes eulériens

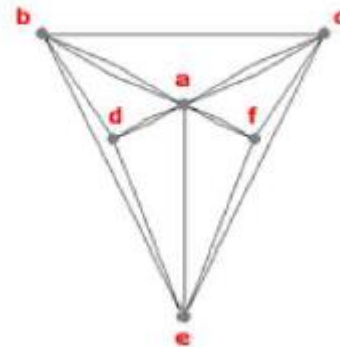
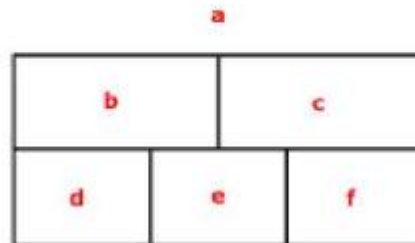
Exercice :

Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Solution

Non, car le graphe correspondant n'est pas eulérien. Pour construire ce graphe, on a représenté les régions délimitées par des cloisons par les sommets ; les sommets x et y sont reliés si les régions x et y sont séparées par une cloison. Chaque cloison correspond donc à une arête du graphe.



Démonstrations des théorèmes

Théorème I (Lemme des poignées de mains)

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête (x, y) de E est comptée deux fois, une première fois pour $d(x)$ et une seconde fois pour $d(y)$. Donc, cette somme est finalement égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Démonstrations des théorèmes

Théorème 2

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appellera coloriage d'un graphe G à k couleurs toute application f de V dans $\{1, \dots, k\}$. On dira qu'un coloriage f est propre si deux sommets voisins n'ont pas la même couleur.

Soit G un graphe biparti et f un coloriage à 2 couleurs de G . Si $(x_0, \dots, x_n)$ est une chaîne, on a pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $f(x_i) \neq f(x_{i+1})$, d'où $f(x_{2k}) = f(x_0)$ et $f(x_{2k+1}) = f(x_1)$.

Maintenant, si cette chaîne est un cycle, on a $x_0 = x_n$, d'où $f(x_0) = f(x_n)$, ce qui implique que n est pair. G ne possède donc pas de cycle de longueur impaire.

Soit maintenant $G = (V, E)$ un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire. On doit construire un coloriage propre de G . Comme les composantes connexes ne communiquent pas entre elles, on peut se ramener au cas où G est connexe : il suffira ensuite de recoller les applications.

Soit x_0 un sommet quelconque de V . Pour $x \in V$, on note $l(x)$ la longueur minimale d'un chemin reliant x_0 à x . On pose alors $f(x) = 1$ si $l(x)$ est pair, $f(x) = 2$ sinon. Soit $\{x, y\} \in E$: il est facile de voir que $|l(x) - l(y)| = 1$. Si on avait $l(x) = l(y)$, on pourrait construire un cycle de longueur $2l(x) + 1$ contenant le point x_0 et l'arête $\{x, y\}$. Ceci est contraire à l'hypothèse selon laquelle le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire. On a donc $|l(x) - l(y)| = 1$, donc $l(x)$ et $l(y)$ ne sont pas de même parité, ce qui implique $f(x) \neq f(y)$. Le coloriage est donc bien propre.

Démonstrations des théorèmes

Théorème 3

Un graphe est eulérien s'il est connexe et si tous ses sommets sont de degré pair. Il est semi-eulérien si tous ses sommets sauf deux sont de degré pair ; les chaînes eulériennes du graphe auront alors ces deux sommets pour extrémités.

Supposons que G est eulérien. Dessinons G et effaçons les arêtes que nous avons déjà parcourues. Chaque passage en un point intermédiaire efface deux arêtes (arrivée et départ). Ces points intermédiaires sont donc de degré pair puisqu'à la fin plus aucune arête n'y aboutit. Soit M le point de départ (et aussi d'arrivée) : chaque passage intermédiaire a effacé deux arêtes, le premier en avait effacé une et le dernier en efface une autre. Cela fait au total un nombre pair d'arêtes pour ce point aussi. Lorsque G est semi-eulérien, le même raisonnement montre que le premier et le dernier point du tracé sont exactement les deux seuls points de degré impair.

Démonstrations des théorèmes

Théorème 4 (Ore)

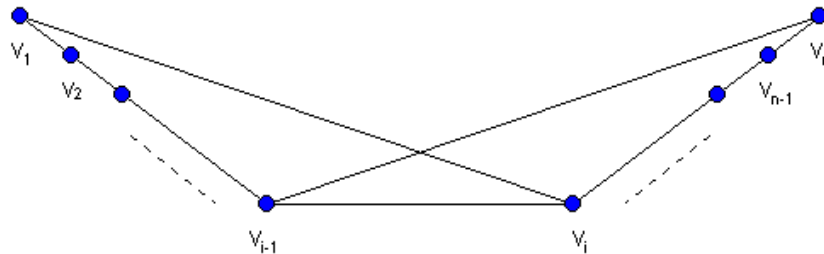
Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Corollaire 1 (Dirac)

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G , on a $d(x) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un graphe G à n sommets satisfait l'hypothèse de l'énoncé mais n'est pas hamiltonien. Quitte à rajouter à G d'autres arêtes, on peut supposer que G est "non hamiltonien maximal", *id est* que le rajout d'une seule arête suffirait à le rendre hamiltonien (remarquons que le rajout d'éventuelles arêtes augmente $d(v) + d(w)$ de sorte que le nouveau graphe continue à satisfaire l'hypothèse sur les degrés). Soit vw l'arête qu'il suffirait de rajouter pour rendre G hamiltonien.

Désignons v par v_1 et w par v_n . Introduisant cette hypothétique arête (v_1, v_n) , on obtient donc un lacet de Jordan passant une fois et une seule par chaque sommet de G . Il en résulte qu'il existe un chemin de Jordan "vraiment" contenu dans G , et donc que G est semi-hamiltonien. Nous allons établir la contradiction en prouvant que G , *non hamiltonien par hypothèse*, contient pourtant un lacet de Jordan hamiltonien. Pour cela, montrons qu'il existe, le long du chemin $v_1 v_2 \dots v_n$, deux sommets consécutifs v_{i-1} et v_i tels que v_i soit relié à v_1 et v_{i-1} à v_n . Car alors, le circuit dessiné ci-dessous est bien un lacet de Jordan hamiltonien de G d'où la contradiction.



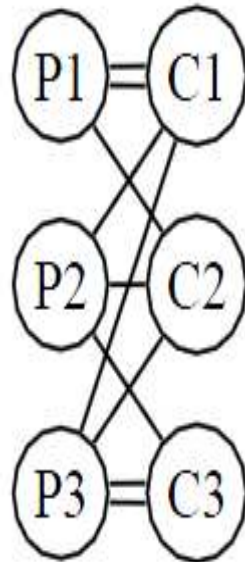
Par hypothèse, v_1 et v_n ne sont pas adjacents, sinon G serait déjà hamiltonien. Il en résulte que $d(v_1) + d(v_n) < n$. Supposons que n'existe aucun couple (v_{i-1}, v_i) satisfaisant la propriété ci-dessus, et soit $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ les sommets adjacents à v_n . Remarquons que $i_1 \geq 2$ et $i_k \leq n-1$. Aucun des sommets $v_1, v_{i_1+1}, \dots, v_{i_k+1}$ ne peut alors être adjacent à v_1 . Il en résulte que soit qui contredit l'hypothèse. Ceci termine la démonstration.

Exercice 2 :

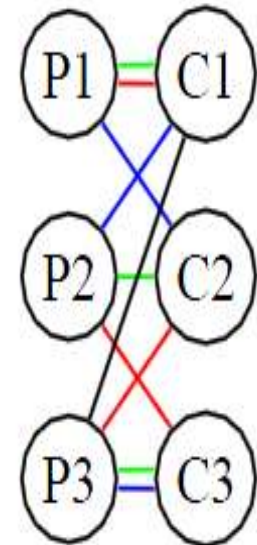
- Trois professeurs P1 , P2 , P3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C1 , C2 , C3 :
 - P1 doit donner 2 heures de cours à C1 et 1 heure à C2 ;
 - P2 doit donner 1 heure de cours à C1 , 1 heure à C2 et 1 heure à C3 ;
 - P3 doit donner 1 heure de cours à C1 , 1 heure à C2 et 2 heures à C3 .
- 1) Comment représenter cette situation par un graphe ?
 - 2) Quel type de graphe obtenez-vous ?
 - 3) Combien faudra-t-il de plages horaires au minimum?
 - 4) Aidez-vous du graphe pour proposer un horaire du lundi pour ces professeurs.

Solution

- On obtient le graphe biparti suivant (à gauche) :



En colorant les arêtes de ce graphe (1 couleur = 1 heure de l'horaire), en prenant garde que chaque sommet n'ait pas deux arêtes incidentes de même couleur, on obtient le résultat de droite.



De ce graphe coloré, on tire l'horaire suivant :

	P1	P2	P3
1ère heure (rouge)	C1	C3	C2
2ème heure (vert)	C1	C2	C3
3ème heure (bleu)	C2	C1	C3
4ème heure (noir)			C1

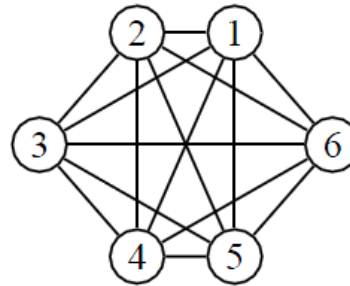
Exercice 3

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

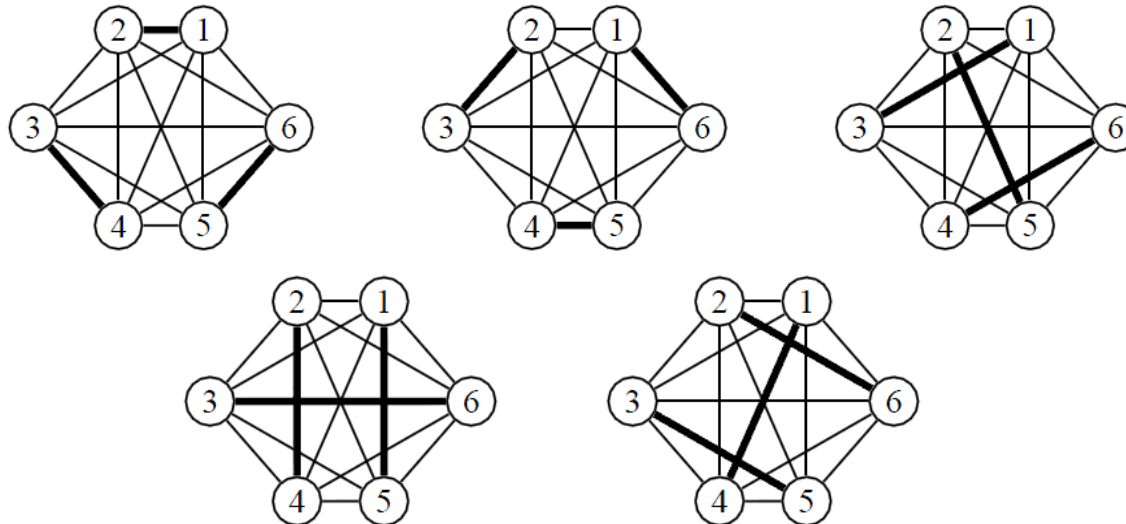
- 1) Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
- 2) Quel type de graphe obtenez-vous ?
- 3) Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?
- 4) Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Solution

On obtient le graphe complet K_6 .



Il faudra 5 jours de tournoi. Voici un calendrier possible :

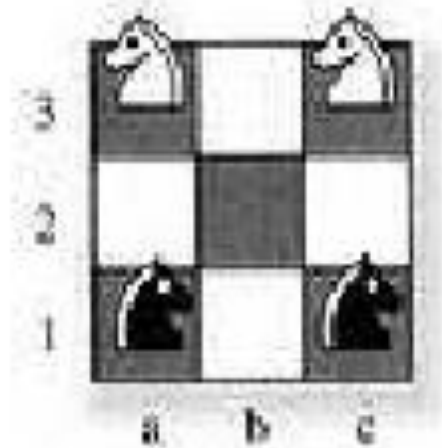


Ce calendrier a été construit d'après les cinq schémas ci-dessus :

Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5
1-2	2-3	1-3	2-4	1-4
3-4	4-5	4-6	1-5	2-6
5-6	1-6	2-5	3-6	3-5

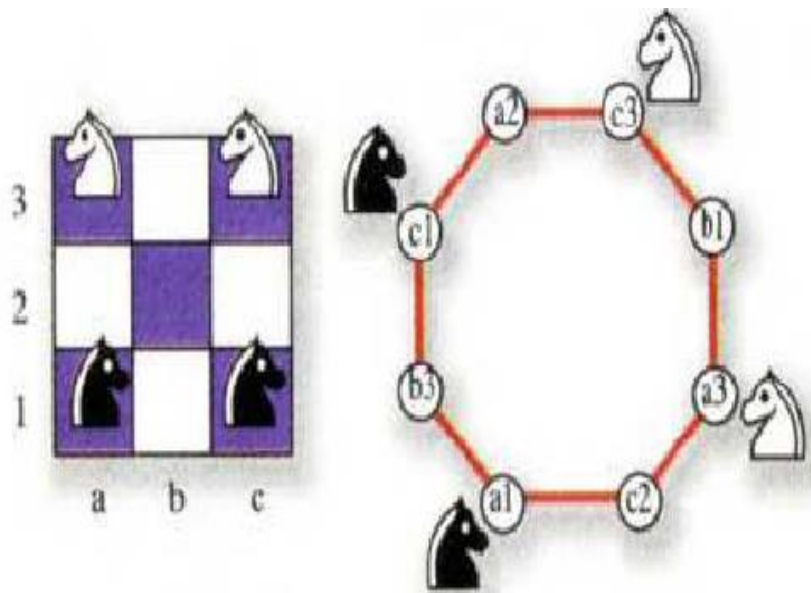
Exercice 4

- Sur un échiquier 3×3, les deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, les deux cavaliers blancs occupant les cases a3 et c3.
- Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa.
- Les blancs commencent.



Solution

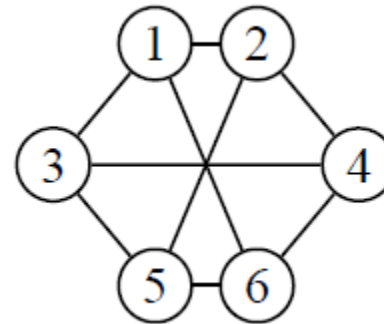
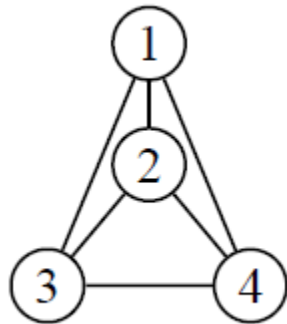
- On utilise le graphe qui indique les cases atteignables depuis une case courante.



Les mouvements sont donc (par exemple) : c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3, c3-b1, a3-c2, a1-b3, c1-a2, b1-a3, c2-a1, b3-c1, a2-c3

Exercice 8

On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Construisez de tels graphes ayant 4, 5, 6 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le !



La figure ci-dessus montre deux graphes 3-réguliers (on dit aussi cubiques), ayant respectivement 4 et 6 sommets. En effet, on constate aisément qu'il n'existe pas de graphes cubiques ayant un nombre impair de sommets : le nombre d'arêtes d'un graphe cubique à n sommets est $3n/2$, qui n'est entier que lorsque n est impair.

Références

- COGIS O., ROBERT C., Théorie des graphes, Vuibert, 2003.
- DROESBEKE F., HALLIN M., LEFEVRE C., Les graphes par l'exemple, Ellipse, 1987.
- HERTZ A., L'agrapheur - Intrigues policières à saveur mathématique, Presses internationales Polytechnique, 2010.
- GONDRAN M., MINOUX M., Graphes et algorithmes, 4e édition, Lavoisier, 2009.
- SKIENA S., Implementing Discrete Mathematics : Combinatorics and Graph Theory With Mathematica, Addison-Wesley, 1990.
- WEST D., Introduction to Graph Theory, 2nd edition, Prentice Hall, 2001
- MULLER D, Introduction à la théorie des graphes, CAHIERS DE LA CRM, 2012