

Méthode du Simplexe

Chahdoura Sonia

4 octobre 2023

- 1 Introduction
- 2 Forme canonique et standard
 - Forme canonique
 - Forme standard
 - Relation entre forme canonique et standard :
- 3 Algorithme du simplexe :
 - Notion de base réalisable :
 - Conditions d'optimalité
 - Formules itératives
- 4 Méthode des deux phases
- 5 Dualité
 - Dualité
 - Écarts complémentaires :

Plan

- 1 Introduction
- 2 Forme canonique et standard
 - Forme canonique
 - Forme standard
 - Relation entre forme canonique et standard :
- 3 Algorithme du simplexe :
 - Notion de base réalisable :
 - Conditions d'optimalité
 - Formules itératives
- 4 Méthode des deux phases
- 5 Dualité
 - Dualité
 - Écarts complémentaires :

Ce chapitre est consacré à l'étude de la méthode du simplexe.

C'est une méthode algébrique itérative :

- introduite par George Dantzig en 1951.
- Elle permet de résoudre des problèmes de programmation linéaire en un nombre fini d'itérations.
- Elle consiste à choisir un sommet réalisable initial puis passer à une solution qui améliore la fonction d'objectif, jusqu'à aboutir à l'optimum.
- De plus, elle fournit un test qui permet d'affirmer, le cas échéant, que le problème n'admet pas de solution.

Programme linéaire :

Un programme linéaire (PL) est un modèle mathématique qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$(\text{PL}) \left\{ \begin{array}{ll} \max(\text{ou min}) [Z(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p c_j x_j] & \\ \sum_{j=0}^p a_{ij} x_j \leq (\text{et/ou } \geq) b_i & \text{pour } i = 1, \dots, q \\ \sum_{j=0}^p a_{ij} x_j = b_i & \text{pour } i = q + 1, \dots, m \end{array} \right.$$

avec c_j , a_{ij} et b_i des réels fixés et x_j des variables réelles.

Forme canonique

Si toutes les contraintes d'un programme linéaire sont des inéquations et que toutes les variables sont astreintes à être positives, on dit que le programme linéaire se présente sous sa forme canonique, noté (FC). Matriciellement, un (PL) s'écrit sous sa forme canonique de la manière suivante :

$$(FC) \begin{cases} \max(ou \min)[Z(x) = c^*x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p} \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^p$, A matrice de dimension $m \times p$ et $b \in \mathbb{R}^m$, x est un vecteur colonne de dimension $(n \times 1)$. $*$: l'opérateur transposé.

Théorème

Tout (PL) peut être transformé sous forme canonique.

Forme standard

Une forme standard est un (PL) où toutes les contraintes sont des égalités et toutes les variables sont restreintes à être positives.

La méthode du simplexe exige que le programme linéaire soit mis sous forme standard, c'est à dire toutes les contraintes sont des équations et toutes les variables de décision sont positives.

Cette transformation se fait en :

- introduisant des variables positives, appelées variables d'écarts.
- Si les contraintes sont de type " $\leq$ " (resp " $\geq$ ") on ajoute (resp on retranche) une variable x_i positive.
- De plus, si on a une variable x_i négative alors il suffit de la remplacer par $x'_i = -x_i$,
- et si une variable x_i est sans restriction de signe, on la remplace par $x_i = x_i^+ - x_i^-$ avec $x_i^+ \geq 0$ et $x_i^- \geq 0$

Théorème

Tout (PL) peut être mis sous forme standard.

Exemple

Ecrire le (PL) suivant sous forme standard :

$$\begin{cases} \max(\text{ou min})[Z(x_1, x_2, x_3) = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3] \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 18 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \text{ et } x_3 \text{ sans restriction de signe.} \end{cases}$$

- La première contrainte est déjà une égalité.
- Pour la deuxième on ajoute une variable positive x_4 , on obtient :

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 18,$$
- et pour la troisième contrainte, on retranche une variable positive x_5 .

Passons maintenant à la transformation des variables :

- 1 la variable x_2 est négative, donc on la remplace par $x'_2 = -x_2$.
- 2 Enfin pour la variable sans restriction de signe x_3 , on la remplace par $x'_3 = x_3^+ - x_3^-$ avec x_3^+ et x_3^- qui sont deux variables positives.

Donc, l'écriture sous forme standard de ce (PL) est comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max(\text{ou min})[Z(y_1) = 20x_1 - 30x'_2 + 40x_3^+ - 40x_3^-] \\ 2x_1 - x'_2 - 3x_3^+ + 3x_3^- = 14 \\ x_1 - 3x'_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- + x_4 = 18 \\ x_1 + x'_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- - x_5 = 8 \\ y_1 = (x_1, x'_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5) \geq 0_{\mathbb{R}^6} \end{array} \right.$$

L'écriture sous forme matricielle de ce (PL) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max[Z(y) = c^*y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^6} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$c = (20, -30, 40, 40, 0, 0), y^* = (x_1, x'_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5).$$

Donc en général, tout problème de programmation linéaire peut s'écrire sous forme standard, noté (FS), ce qui peut être représenté matriciellement par :

$$(FS) \begin{cases} \max(\text{ou min}) [\tilde{Z}(y) = \tilde{c}^* y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

avec $n = p + q + g$; p : le nombre des variables de décision, q : le nombre des variables d'écart, g : le nombre des variables dûes aux variables sans restriction de signe. et $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0_{\mathbb{R}^{q+g}} \end{pmatrix}$.

Relation entre forme canonique et standard :

Le (PL) sous forme canonique admet m contraintes d'inégalités de type " $\leq$ "; donc mettre le (FC) sous forme standard revient à ajouter une variable positive à chaque contrainte, alors on ajoute exactement m variables d'écart. La forme standard associée à (FC) s'écrit :

$$(\text{FS}) \begin{cases} \max(\text{ou min}) [Z(y) = c^*y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^m} \end{cases}$$

avec $M = [A \ I_m]$, $c = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ 0_{\mathbb{R}^m} \end{pmatrix}$ et I_m : la matrice identité d'ordre m .

L'algorithme du simplexe ne s'applique qu'aux formes standards; donc on a besoin d'une relation entre les résultats de la résolution du (FS) et le problème initial (PL).

Théorème

Une solution v est optimale pour (FC) si et seulement si $\begin{pmatrix} v \\ b-Av \end{pmatrix}$ est une solution optimale de la forme standard associée. De plus, on a :

$$Z(v) = \tilde{Z}\begin{pmatrix} v \\ b-Av \end{pmatrix}$$

Un problème de programmation linéaire pourrait toujours se présenter sous forme standard :

$$(FS) \begin{cases} \max(\text{ou min})[Z(y) = c^*y] \\ My = b \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}^n$, M matrice $(m \times n)$, et $b \in \mathbb{R}^m$.

Le développement théorique de l'algorithme du simplexe ne s'applique que si la matrice M est de rang m . En effet, si $\text{rang}M < m$, on peut éliminer les

équations qui sont une combinaison linéaire des autres contraintes, sinon le domaine réalisable est vide et le problème est mal posé.

Cette hypothèse nous garantit l'existence d'une sous matrice carrée inversible d'ordre m , notée B .

On note par M_i : la i^{e} colonne de M , $M = (M_{i_1}, \dots, M_{i_n})$.

- Matriciellement, $B = (M_{i_1}, \dots, M_{i_m})$ tel que le déterminant de ces m vecteurs est différent de zéro. On note par $J_B = \{i_1, \dots, i_m\}$.
- Le choix d'une base B induit une décomposition de la matrice M de la forme $M = [B \ N]$ où N est la $p \times (n - m)$ matrice formée des colonnes de M n'entrant pas dans la composition de la base B .
- La matrice N est formée par le reste des colonnes M_i telle que $i \notin J_B$, on note l'ensemble de ces indices par J_N .

Les variables y_i tels que $i \in J_N$ s'appellent variables hors base, notés y_N .

Partitionnant les données du problème linéaire selon cette notation, on obtient : $M = [B \ N]$, $y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix}$, où $y_B = (y_i; i \in J_B)$ et $y_N = (y_i; i \in J_N)$; et $c = (c_B \ c_N)$.

On peut toujours exprimer les variables y_B de base en fonction de variable hors base y_N :

$$\begin{aligned} My = b &\Leftrightarrow [B \ N] \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix} = b \\ &\Leftrightarrow By_B + Ny_N = b \\ &\Leftrightarrow y_B = B^{-1}b - B^{-1}Ny_N, \text{ car } B \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

Alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^n$ du système linéaire $My = b$ est formé par les vecteurs $y = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Ny_N \\ y_N \end{pmatrix}$ où y_N dans $\mathbb{R}^{n-m}$.

Parmi les solutions de ce système, on distingue les solutions de base pour lesquelles $y_N = 0$. Une telle solution existe et elle vaut $y = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix}$.

- Cette solution de base est **réalisable** si et seulement si $B^{-1}b$ est positive. On dit alors que **la base B est réalisable**.
- On dit qu'une solution de base réalisable est **dégénérée** si le vecteur $B^{-1}b$ admet au moins une composante nulle, sinon (i.e. $B^{-1}b > 0$), la solution est dite **non dégénérée**.

Conditions d'optimalité

Soit B une base réalisable, $y^{(0)} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix}$ sa solution de base réalisable associée. La fonction d'objectif au point $y^{(0)}$ vaut :

$$\begin{aligned} Z(y^{(0)}) &= c y^{(0)} = (c_B^* \ c_N^*) \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix} \\ &= c_B^* B^{-1}b \end{aligned}$$

Soit y une solution réalisable, sa fonction économique peut s'écrire en fonction de celle au point $y^{(0)}$, en effet :

$$\begin{aligned} Z(y) &= c^* y = (c_B^* y_B + c_N^* y_N) \\ &= (c_B^* [B^{-1}b - B^{-1}N y_N] + c_N^* y_N) \text{ car } y_B = B^{-1}b - B^{-1}N y_N \\ &= Z(y^{(0)}) + [c_N^* - c_B^* B^{-1}N] y_N \end{aligned}$$

Dans le théorème suivant, on va présenter la condition d'optimalité pour l'algorithme du simplexe.

Le vecteur des coûts réduits associé à la base B est défini comme suit :

$$w_N^* = \begin{cases} c_N^* - c_B^* B^{-1} N, & \text{si "max"} \\ -c_N^* + c_B^* B^{-1} N, & \text{si "min"} \end{cases}$$

Naturellement, on dit qu'une base B est optimale si la solution associée $y = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix}$ est optimale.

Théorème

On se donne une base réalisable B du problème sous forme standard. Alors, on a :

- (i) $w_N^* \leq 0_N^* \implies B$ est optimale.
- (ii) si de plus la base B est non dégénérée (i.e. $B^{-1}b > 0_B$), alors on a :

$$B \text{ est optimale} \implies w_N^* \leq 0_N^*$$

Théorème

On suppose que la base réalisable B vérifie $w_N^* \not\leq 0_N^*$. Il existe donc une composante w_s du vecteur w_N^* qui est strictement positive. Considérons le $s^{\text{ème}}$ vecteur colonne $\gamma = B^{-1}N_{.s}$ de la matrice $B^{-1}N$. Alors deux cas se présentent :

- ou bien $\gamma \leq 0_B$ dans ce cas l'optimum est infini,
- ou bien $\gamma \not\leq 0_B$. Dans ce cas, on calcule le réel

$$\lambda = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_i} ; \text{pour } i = 1, \dots, m / \gamma_i > 0 \right\}.$$

et on détermine un indice $r \in \{1, \dots, m\}$ pour lequel ce minimum λ est atteint (i.e. $\lambda = \frac{(B^{-1}b)_r}{\gamma_r}$). Alors, la matrice B' , obtenue à partir de $B = (B_{.1}, \dots, B_{.m})$ en remplaçant le vecteur colonne $B_{.r}$ par $N_{.s}$, est une base réalisable.

Théorème

La solution de base $y^{(1)} = \begin{pmatrix} B'^{-1}b \\ 0_{N'} \end{pmatrix}$ associée à B' vérifie :

$$(B'^{-1}b) = \begin{cases} (B^{-1}b)_i - \lambda \gamma_i & \text{si } i \neq r \\ \lambda & \text{si } i = r \end{cases} \quad (2.1)$$

De plus, la fonction à optimiser vaut :

$$Z(y^{(1)}) = \begin{cases} Z(y^{(0)}) + \lambda w_s & \text{si "max"} \\ Z(y^{(0)}) - \lambda w_s & \text{si "min"} \end{cases}$$

Ici, le point $y^{(0)}$ représente la solution de base réalisable associée à B :

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix}.$$

On peut résumer les étapes de l'algorithme du simplexe comme suit :

Algorithm 1 Simplex Algorithm

Choisir une base réalisable B telle que $B^{-1}b \geq 0$

Calculer les données nécessaires relatives à la base B : $y = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix}$, $B^{-1}N$, $w_N^* = \pm(c_N^* - c_B^* B^{-1}N)$, et la valeur de la fonction objectif Z .

while $w_N^* \not\leq 0_N^*$ **do**

 Choisir une composante positive w_s selon la règle de pivotage adoptée.

if $\gamma = B^{-1}N_{.s} \leq 0$ **then**

 L'optimum est infini, et l'algorithme est terminé.

else

 Calculer $\lambda = \min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{\gamma_{ij}}, \text{ pour } j = 1, \dots, m \text{ tel que } \gamma_{ij} > 0\right\}$

$r = \operatorname{argmin}(\lambda) \quad \% \lambda = \frac{(B^{-1}b)_r}{\gamma_r}$

 Permuter $B_{.r}$ avec $N_{.s}$ et mettre à jour les données nécessaires.

end if

end while

Le point y est une solution optimale, et l'algorithme est terminé.

- Pour faciliter la manipulation pratique, les éléments impliqués dans l'algorithme du simplexe peuvent être récapitulés dans un tableau, appelé **tableau simplexe**.
- Chaque itération simplexe correspond à une base B .
- Ici, nous utilisons la forme condensée qui est une taille réduite de dimension $(m + 1) \times (n - m + 1)$ alors que le tableau simplexe standard est de dimension $(m + 1) \times (n + 1)$:

y_{j_1}	$\dots$	$y_{j_{n-m}}$	
$B^{-1}N$		$B^{-1}b$	y_{i_1}
			$\vdots$
			y_{i_m}
w_N^*		$\mp Z$	

- Les variables $y_{i_1}, \dots, y_{i_m}$ correspondent aux variables de base associées à la base en cours B
- $y_{j_1}, \dots, y_{j_{n-m}}$ sont les variables hors base associées à la matrice N

Formules itératives

Les éléments d'un tableau simplexe vont être déterminés itérativement à partir des éléments du tableau précédent. D'après l'étude précédente, on a pu décrire la nouvelle solution $y^{(1)}$ par $y^{(1)} = \begin{pmatrix} y_B^{(1)} = B'^{-1}b \\ y_N^{(1)} = 0_{N'} \end{pmatrix}$. La valeur de la fonction objectif Z et la solution $y_B^{(1)}$ peuvent être calculées par les formules suivantes :

$$(y_B^{(1)})_i = \begin{cases} (y_B^{(0)})_i - \lambda \gamma_i & \text{si } i \neq r \\ \lambda & \text{si } i = r \end{cases}$$

avec $y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_B^{(0)} \\ 0_N \end{pmatrix}$ est la solution de base associée à la base B .

$$Z(y^{(1)}) = \begin{cases} Z(y^{(0)}) + \lambda w_s & \text{si "max"} \\ Z(y^{(0)}) - \lambda w_s & \text{si "min"} \end{cases}$$

Il nous reste maintenant la détermination de la matrice $\beta = B^{-1}N$ et le vecteur des coûts réduits w_N^* .

Théorème

Les relations qui lient $\beta' = B'^{-1}N'$ avec $\beta = B^{-1}N$ sont données par :

$$\beta'_{is} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_{rs}} & i = r \\ -\frac{\beta_{is}}{\beta_{rs}} & i \neq r \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta'_{rj} = \frac{\beta_{rj}}{\beta_{rs}} & j \neq s \\ \beta'_{ij} = \beta_{ij} - \frac{\beta_{is}\beta_{rj}}{\beta_{rs}} & j \neq s \text{ et } i \neq r \end{cases} \quad (3.1)$$

Théorème

On pose $w_{N'}^* = (w'_1, \dots, w'_p)$ et $w_N^* = (w_1, \dots, w_p)$. Les composantes de $w_{N'}^*$ sont données par :

$$w'_j = \begin{cases} -\frac{w_s}{\beta_{rs}} & \text{si } j = s \\ w_j - \frac{w_s \beta_{rj}}{\beta_{rs}} & \text{si } j \neq s \end{cases}$$

Les éléments intérieurs constituant le tableau simplexe sont concaténés en une seule matrice notée H :

$$H = \begin{pmatrix} B^{-1}N & B^{-1}b \\ w_N^* & \mp Z \end{pmatrix}$$

Si le pivot est H_{rs} pour certaines itérations, alors les entrées composant la nouvelle matrice pour l'itération suivante satisfont l'expression suivante :

$$H_{is} \longleftarrow \begin{cases} -\frac{H_{is}}{H_{rs}} & \text{pour } i \neq r \\ \frac{1}{H_{rs}} & \text{pour } i = r \end{cases} \begin{cases} H_{rj} \longleftarrow \frac{H_{rj}}{H_{rs}} & \text{pour } j \neq s \\ H_{ij} \longleftarrow H_{ij} - \frac{H_{is}H_{rj}}{H_{rs}} & \text{pour } j \neq s \text{ \& } i \neq r \end{cases} \quad (3.2)$$

Exemple

Résoudre par la méthode du simplexe le (PL) suivant :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_2] \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Itération 1 : **Étape 1** : Transformer le (PL) en (FS) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c = (20, 30, 0, 0, 0) \text{ et } b = (18, 8, 14).$$

Extraire une base réalisable : On constate que les colonnes (M_3, M_4, M_5) , associée aux variables (y_3, y_4, y_5) , de la matrice M forment une base $B = I_3$,

la solution de base correspondante est : $x_B = B^{-1}b = b = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} \geq 0_B$

Étape 2 : construire le tableau du simplexe : commençons par calculer

$$B^{-1}N = N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur coût réduit $w_N^* = c_N^* - c_B^* B^{-1}N = c_N^* = (20 \ 30)$.

y_1	y_2		
1	3	18	y_3
1	1	8	y_4
2	1	14	y_5
20	30	0	

Étape 3 : Vérification de la condition d'optimalité :

On a $w_N^* = (20, 30) \not\leq 0_N$ alors l'optimum n'est pas atteint.

Étape 4 : L'indice de variable entrante s est choisie, on considère le plus grand coefficient positif de w_N^* :

$$w_s^* = \max\{w_i^* \text{ tel que } w_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n - p\} = \max\{20, 30\} = 30$$

donc $s = 2$.

Étape 5 : Pour que la nouvelle base reste réalisable, on va choisir $r = 1$. En effet,

$$\text{On a } \gamma = B^{-1}N_s = N_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer le réel :

$$\lambda = \min\left\{\frac{(B^{-1}b)_j}{\gamma_j}, \text{ pour } j = 1, \dots, m \text{ tel que } \gamma_j > 0\right\} = \min\left\{\frac{18}{3}, \frac{8}{1}, \frac{14}{1}\right\} = 6$$

r est l'indice pour lequel le minimum λ est atteint, donc $r = 1$.

Itération 2 : à l'itération 2, B' s'obtient en remplaçant la 3^e colonne de B par la deuxième colonne de N . Donc :

$$B' = (M_2, M_4, M_5) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } N' = (M_1, M_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice $B'^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$J_{B'} = \{y_2, y_4, y_5\}, \text{ et } J_{N'} = \{y_1, y_3\}$$

À chaque itération on garde les mêmes notations, c'est à dire on note B' par B .

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

y_1	y_3		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	6	y_2
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	y_4
$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8	y_5
10	-10	180	

Pour choisir quelle colonne doit entrer dans la base B , on choisit :

$$w_s^* = \max\{w_i^* \text{ tel que } w_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n - p\} = \max\{10\} = 10$$

donc, le seul choix possible est $s = 1$.

$$\text{On a } \gamma = B^{-1}N_s = B^{-1}N_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

calculer le paramètre

$$\lambda = \min\left\{\frac{(B^{-1}b)_j}{\gamma_j}, \text{ pour } j = 1, \dots, m \text{ tel que } \gamma_j > 0\right\} = \min\left\{\frac{6}{\frac{1}{3}}, \frac{2}{\frac{2}{3}}, \frac{8}{\frac{5}{3}}\right\} = 3$$

donc $r = 2$.

Itération 3 : En faisant l'échange de la 2^e colonne de B avec la 1^{re} colonne de N , le tableau du simplexe associé est :

y_4	y_3		
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	y_2
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	y_1
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	y_5
-15	-5	210	

- Comme tous les coefficients de w_N^* sont négatifs, on est arrivé à un sommet optimal, et comme tous les coefficients sont non nuls ce sommet est unique.
- L'optimum est atteint en $y = (3, 5, 0, 0, 3)$.
- D'après le théorème 3, $x = (3, 5)$ est la solution optimale du problème initial.

Méthode des deux phases

- C'est une méthode de résolution exacte en deux phases, introduite par *Ulungu* en 1993, pour initialiser une base réalisable.
- L'esprit général de cette méthode est de préserver la structure du problème canonique, afin d'exploiter intensivement l'algorithme du simplexe.

l'idée de cette méthode est de transformer toutes les contraintes de telle sorte que le second membre devient positif, puis d'apparaître une matrice identité comme base initiale en ajoutant des vecteurs e_i correspondants. Alors la méthode de deux phase consiste à ajouter des variables artificielles x_{a_i} dans les équations où il n'y a aucune variable qui entre dans la composition de base identité.

Ce qui nous ramène au problème suivant :

$$\begin{aligned}
 My + I_q x_a = b \text{ telque } y \in \mathbb{R}^n &\Leftrightarrow [M \ I_q] \begin{pmatrix} y \\ x_a \end{pmatrix} = b \\
 &\Leftrightarrow M' y' = b \text{ telque } y' \in \mathbb{R}^{n+q} \quad (0.1)
 \end{aligned}$$

avec q : est le nombre des variables artificielles, et I_q : est une matrice composée des vecteurs e_i . Puisque le problème initial ne dépend pas des variables artificielles x_{a_i} , alors chercher une solution réalisable initiale revient à trouver une solution réalisable du système (0.1) telle que toutes les variables x_a sont nulles.

Pour ce système on va affecter une fonction d'objectif artificielle :

$$\begin{cases} T(y') = -\sum_{i=1}^q x_{a_i} & \text{si max} \\ T(y') = \sum_{i=1}^q x_{a_i} & \text{si min} \end{cases}$$

En résumé, la première partie de la méthode de deux phases consiste à résoudre par l'algorithme de simplexe le problème auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min[T(y') = \sum_{i=1}^q x_{a_i}] \\ M'y' = b \\ y' \geq 0_{\mathbb{R}^{n+q}} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \max[T(y') = -\sum_{i=1}^q x_{a_i}] \\ M'y' = b \\ y' \geq 0_{\mathbb{R}^{n+q}} \end{array} \right.$$

Une fois qu'on a obtenu une base réalisable B qui ne dépend pas des vecteurs associés aux variables artificielles ($T(y') = 0$) ; on passe, dans la phase 2, à résoudre le problème initial par l'algorithme du simplexe, en considérant B trouvée comme une base réalisable initiale.

Dualité

Pour tout problème de programmation linéaire, on peut associer un autre problème de même nature appelé "dual". La notion de dualité a été introduite par Von Neuman en 1947. On considère un programme linéaire, appelé primal, écrit sous forme canonique, que l'on note par (FCP) :

$$(PFC) \begin{cases} \max[Z(x) = c^*x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0_{\mathbb{R}^p} \end{cases}$$

où A est une matrice (m, p) , $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^p$. On définit le dual de ce problème par le programme linéaire suivant, noté par (DFC) :

$$(FCD) \begin{cases} \min[\psi(v) = b^*v] \\ A^*v \geq c \\ v \geq 0_{\mathbb{R}^m} \end{cases}$$

Dans des cas particuliers, la résolution du problème dual peut être moins coûteuse que celle du problème primal. En effet, dans certains problèmes, il est facile d'extraire une base réalisable pour le dual et on peut démarrer directement l'algorithme du simplexe, tandis que pour le primal on est obligé de passer par une méthode d'initialisation.

La forme générale d'un primal de type maximisation s'écrit :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \max[Z(x) = \sum_{j=1}^p c_j x_j] & \\ \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq b_i & \text{pour } i = 1, \dots, l \\ \sum_{j=0}^p a_{ij} x_j = b_i & \text{pour } i = l + 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ x_j \text{ s.r.s} & \text{pour } j = k + 1, \dots, p \end{array} \right.$$

En remplaçant :

- chaque contrainte d'égalité par une double inégalité
- chaque variable x_j s. r. s. par la différence de deux variables positives x_j^+ et x_j^- ,

le primal (P) va devoir acquérir une forme canonique, par suite nous pouvons déterminer son dual (D).

Après un certain nombre d'opérations algébriques, on montre que le dual de (P) est de la forme suivante :

$$(D) \left\{ \begin{array}{ll} \min[\psi(v) = \sum_{i=1}^m b_i v_i] & \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i \geq c_j & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i = c_j & \text{pour } j = k + 1, \dots, p \\ v_j \geq 0 & \text{pour } j = 1, \dots, l \\ v_j \text{ s.r.s} & \text{pour } j = l + 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Primal	Dual
-maximisation -coefficients d'objectif -second membre -matrice régissant les contraintes -Relation liant les contraintes : * i^{ime} inégalité : $\leq$ * i^{ime} équation : $=$ -Nature des variables : * $x_j \geq 0$ * x_j s.r.s.	-minimisation -second membre -coefficients d'objectif - matrice transposé -Nature des variables : * $v_i \geq 0$ * v_i s.r.s. -Relation liant les contraintes : * j^{ime} inégalité : $\geq$ * j^{ime} équation : $=$

Théorème

Le dual du dual est le primal.

Lemme

Soit x et v deux solutions réalisables de (P) et (D) respectivement, alors $Z(x) \leq \psi(v)$.

Preuve Considérons deux éléments $x \in \mathbb{R}^p$ et $v \in \mathbb{R}^m$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \leq b_i & \text{pour } i = 1, \dots, l \\ \sum_{j=0}^p a_{ij}x_j = b_i & \text{pour } i = l+1, \dots, m \\ x_j \geq 0 & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ x_j \text{ s.r.s} & \text{pour } j = k+1, \dots, p \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i \geq c_j & \text{pour } j = 1, \dots, k \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}v_i = c_j & \text{pour } j = k+1, \dots, p \\ v_i \geq 0 & \text{pour } i = 1, \dots, l \\ v_i \text{ s.r.s} & \text{pour } i = l+1, \dots, m \end{array} \right.$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
 Z(x) &= \sum_{j=1}^p c_j x_j \\
 &= \sum_{j=1}^k c_j x_j + \sum_{j=k+1}^p \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i x_j, \text{ car } c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i \text{ pour } j > k \\
 &\leq \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i x_j, \text{ car } c_j \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i \text{ et } x_j \geq 0 \text{ pour } j \leq k \\
 &= \sum_{i=1}^m v_i \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \\
 &= \sum_{i=1}^l v_i \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j + \sum_{i=l+1}^m v_i b_i, \text{ car } \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j = b_i \text{ pour } i > l \\
 &\leq \sum_{i=1}^m v_i b_i, \text{ car } \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq b_i \text{ et } v_i \geq 0 \text{ pour } i \leq l \\
 &= \psi(v) \text{ Donc le lemme est ainsi démontré.}
 \end{aligned}$$

Théorème

Soit x_{op} et v_{op} deux solutions réalisables de (P) et (D) respectivement. Si $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$, alors x_{op} et v_{op} sont deux solutions optimales de (P) et (D) respectivement.

Théorème

Si (P) admet une solution optimale x_{op} , alors (D) admet aussi une solution optimale v_{op} et elle vérifie $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$.

Théorème

Soit B une base réalisable de la forme standard relative au primal (P). Si la base B vérifie $w_N^* \leq 0_N^*$ alors $v_{op}^* = \tilde{c}_B^* B^{-1}$ est une solution du dual (D).

Théorème

Soit x_{op} et v_{op} deux solutions réalisables de (P) et (D) respectivement. Si $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$, alors x_{op} et v_{op} sont deux solutions optimales de (P) et (D) respectivement.

Théorème

Si (P) admet une solution optimale x_{op} , alors (D) admet aussi une solution optimale v_{op} et elle vérifie $Z(x_{op}) = \psi(v_{op})$.

Théorème

Soit B une base réalisable de la forme standard relative au primal (P). Si la base B vérifie $w_N^* \leq 0_N^*$ alors $v_{op}^* = \tilde{c}_B^* B^{-1}$ est une solution du dual (D).

Écarts complémentaires :

La méthode des écarts complémentaires permet de déterminer une solution optimale du dual sans passer par la forme standard du primal. Bien sûr, il faut disposer au préalable d'une solution optimale du primal.

Théorème

Soit $x_{op} = (x_1, \dots, x_p)$ et $v_{op} = (v_1, \dots, v_m)$ deux solutions optimales de (P) et (D) respectivement. Alors, on a :

$$\begin{cases} v_i(b_i - \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l \\ x_j(\sum_{i=1}^m v_i a_{ij} - c_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Les conséquences du théorème des écarts complémentaires sont immédiates. Supposons que l'on dispose d'une solution optimale $x_{op} = (x_1, \dots, x_p)$ du primal (P). Pour déterminer une solution optimale $v_{op} = (v_1, \dots, v_m)$ du dual (D), on procède de la façon suivante :

- pour chaque contrainte d'inégalité $i \in \{1, \dots, l\}$ du primal, qui n'est pas **saturée** par le point x_{op} (i.e $\sum a_{ij}x_j < b_i$ ou encore $b_i - \sum a_{ij}x_j > 0$), on a nécessairement $v_i = 0$
- Parmi les contraintes de positivité $j \in \{1, \dots, k\}$ du primal, retenir celles qui vérifient $x_j > 0$. Pour chacune d'entre elles, la contrainte j du dual est

$$\text{forcément saturée : } \sum_{i=1}^m v_i a_{ij} - c_j = 0$$

On ajoute à ces équations, les égalités $\sum a_{ij}v_i = c_j$; $j = k + 1, \dots, p$; qui figurent dans le problème dual. Ainsi, on obtient un système linéaire en v_{op} que l'on résout.

Inversement, si $v_{op} = (v, \dots, v_m)$ est une solution optimale du dual, alors toute solution optimale $x_{op} = (x_1, \dots, x_p)$ du primal vérifie :

- $x_j = 0$ pour chaque contrainte d'inégalité $j \in \{1, \dots, k\}$ du dual, qui est non saturée par v_{op} : $\sum v_i a_{ij} > c_j$
- et $b_i - \sum a_{ij} x_j = 0$ pour chaque contrainte de positivité $i \in \{1, \dots, l\}$ du dual vérifiant $v_i > 0$.

Puisque x_{op} est réalisable, on ajoute à ces équations les égalité

$\sum a_{ij} x_j = b_i$; $i = l + 1, \dots, m$; qui figurent dans les contraintes du primal.

Remarque

Lorsque la forme standard du primal (P) admet une base optimale dégénérée, le problème dual (D) admet une infinité de solutions optimales pourvu que $v_{op} \neq v'_{op}$

Théorème

Si l'optimum du primal est infini alors le domaine réalisable du dual est vide. La réciproque est également vraie.

Paramétrisation du second membre des contraintes :

Dans cette partie, on s'intéresse à la sensibilité de l'optimalité d'un (PL) face à une modification au niveau de second membre des contraintes. Dès lors, on suppose que le vecteur colonne b est assujéti à une variation de valeur $\theta\rho$, où ρ est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^m$. Ainsi, la paramétrisation du problème initial (FS) aboutit à :

$$(FSb) \begin{cases} \max(\text{ou } \min)[Z(y) = c^*y] \\ My = \bar{b}(\theta) \\ y \geq 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases} \quad \text{avec } \bar{b}(\theta) = b + \theta\rho$$

La modification du vecteur b entraîne un changement au niveau du domaine réalisable.

Dans la pratique, les données du vecteur b correspondent en général à la disponibilité en matière première ou en heures de travail, ect.

L'intérêt de la paramétrisation de b est de savoir de combien on peut diminuer ou augmenter les quantités disponibles sans avoir à modifier la stratégie optimale de fabrication.

Théorème

Soit B une base optimale que l'on suppose non dégénérée pour le (FS). Alors, on a le résultat suivant :

$$B \text{ est une base optimale pour (FSb)} \iff \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$$

où

$$\theta_{\min} = \max \left\{ \frac{-(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}\rho)_i} ; \text{ pour } i = 1, \dots, m / (B^{-1}\rho)_i > 0 \right\}$$

et

$$\theta_{\max} = \min \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{-(B^{-1}\rho)_i} ; \text{ pour } i = 1, \dots, m / (B^{-1}\rho)_i < 0 \right\}$$

$$B \text{ est une base optimale pour (FSb)} \iff B^{-1}\bar{b}(\theta) \geq 0_B$$

$$\iff B^{-1}b + \theta B^{-1}\rho \geq 0_B$$

On a $B^{-1}b \geq 0_B$.

$$\begin{cases} \theta \geq \frac{-(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}\rho)_i}, \quad \forall i / (B^{-1}\rho)_i > 0 \\ \theta \leq \frac{(B^{-1}b)_i}{-(B^{-1}\rho)_i}, \quad \forall i / (B^{-1}\rho)_i < 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, lorsque la base B demeure optimale pour (FSb), la solution optimale $\bar{y}^{(0)}(\theta) = \begin{pmatrix} B^{-1}\bar{b}(\theta) \\ 0_N \end{pmatrix}$ et la valeur optimale $Z(\bar{y}^{(0)}(\theta))$ de problème (FSb) vont différer de celles du problème d'origine (FS) :

$$\bar{y}^{(0)}(\theta) = y^{(0)} + \theta \begin{pmatrix} B^{-1}\rho \\ 0_N \end{pmatrix}, \text{ avec } y^{(0)} \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0_N \end{pmatrix}$$

et

$$Z(\bar{y}^{(0)}(\theta)) = Z(y^{(0)}) + \theta c_B^* B^{-1}\rho$$