

Recherche Opérationnelle

Chahdoura Sonia

19 septembre 2023

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modélisation
- 3 Rappel de quelques définitions et propriétés
- 4 Méthode graphique
- 5 Méthode d'énumération des sommets :

Plan

- 1 Introduction
- 2 Modélisation
- 3 Rappel de quelques définitions et propriétés
- 4 Méthode graphique
- 5 Méthode d'énumération des sommets :

La recherche opérationnelle est l'ensemble des méthodes et techniques d'analyse et de synthèse des différents phénomènes utilisables pour obtenir des résultats plus performants. Elle est un processus d'aide à la décision qui permet aux décideurs de faire le choix le plus efficace. On s'intéresse ici à la programmation linéaire.

La qualification “opérationnelle” vient du fait que la première application de la recherche opérationnelle était dans la seconde guerre mondiale pour traiter des opérations militaires : l'implantation optimal de radars de surveillance.

Après la guerre, les techniques d'optimisations ont connues une évolution rapide, surtout avec George Dantzig en 1951, en introduisant la méthode du simplexe, pour résoudre les problèmes linéaires.

Linear program

Parmi les domaines très variés d'application de ces problèmes linéaires on trouve :

- ① énergie (pétrole, électricité)
- ② industrie manufacturière
- ③ gestion financière
- ④ transports
- ⑤ télécommunications
- ⑥ gestion de stock
- ⑦ gestion de production
- ⑧ affectation du personnel
- ⑨ le domaine des applications militaires.

Avant d'exposer en détail la programmation linéaire ; il est utile de traduire les paramètres d'un problème réel dans un langage accessible par la méthode de résolution utilisée.

Cette étape s'appelle la modélisation ou la formulation du problème. Donc, pour notre étude, on a besoin de convertir le problème réel de programmation linéaire en un système d'inéquation linéaire.

Illustrons cette étape par la modélisation de l'exemple suivant :

Exemple

Une manufacture de pile désire ajouter deux produits à son catalogue : Pile1 et Pile2.

La Pile1 nécessite 1g de Cadmium, 1g de Mercure et 2g de Zinc en poudre.

La Pile2 nécessite 3g de Cadmium, 1g de Mercure et 1g de Zinc en poudre.

En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18g de Cadmium, 8g de Mercure et 14g de Zinc en poudre. Il fera un profit de 20DT en vendant une Pile 1 et de 30DT en vendant une Pile2. Combien de piles de type 1 et 2 doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

Le but de ce problème est de déterminer le nombre de piles de type 1 et de type 2, donc identifions d'abord les éléments variables :

x_1 : le nombre de pile de type 1

x_2 : le nombre de pile de type 2

Selon l'énoncé du problème, le bénéfice Z peut s'exprimer en termes de x_1 et x_2 par :

$$Z(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_2.$$

On cherche la valeur maximale que peut prendre Z selon les diverses valeurs de x_1 et x_2 . Les variables x_1 et x_2 ne peuvent pas prendre toutes les valeurs réelles possibles. Il y a des conditions imposées, ces conditions s'expriment par des inéquations. Chaque pile de type 1 nécessite 1g de Cadmium, chaque pile de type 2 nécessite 3g de Cadmium et seulement 18g de Cadmium sont disponibles.

$$x_1 + 3x_2 \leq 18.$$

Un raisonnement similaire pour le Mercure et le Zinc en poudre nous conduit à :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \end{cases}$$

L'entreprise peut fabriquer des nombres positifs ou nulles de Pile 1 et de Pile 2. C'est ce qu'on exprime par la condition de non positivité des variables, soit :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

En résumé, la formulation de cet exemple est comme suit :

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_2] \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

A partir d'étude de l'exemple introductif et d'une façon générale, on conclut que la programmation linéaire consiste à déterminer p variables réels $x_1, \dots, x_p$, appelés variables de décisions, afin de maximiser (ou minimiser) une application linéaire, appelée fonction d'objectif ou fonction économique :

$$Z(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p c_j x_j$$

où les c_j sont des coefficients réels fixés, sous différentes conditions, appelées contraintes, qui sont des équations ou des inéquations comme :

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq (\text{et/ou } =) b_i \text{ pour } i = 1, \dots, m$$

avec a_{ij} et b_i sont des constantes réelles, et les conditions (contraintes) de signe comme par exemple :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ x_3 \text{ sans restriction de signe} \end{cases}$$

En résumé, la programmation linéaire est une branche des mathématiques qui a pour but de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire de type :

$$(\text{PL}) \left\{ \begin{array}{ll} \max(\text{ou min}) [Z(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p c_j x_j] & \\ \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq (\text{et/ou} \geq) b_i & \text{pour } i = 1, \dots, q \\ \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j = b_i & \text{pour } i = q + 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Désormais, on note un programme linéaire par (PL).

- Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite convexe si, pour tout couple x et y de A et tout réel λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, le point $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est un élément de A .
Géométriquement, cela signifie que le segment de droite joignant deux points x et y de A est entièrement contenu dans A .
- Une fonction est dite convexe (resp concave) sur un ensemble convexe E , si pour tout $x, y \in E$ et pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (\text{resp } \geq) \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

- Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^p$.
Pour tout k réel, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^p$ telque $f(x) \leq k$ est appelé demi-espace fermé ; on voit immédiatement que c'est une partie convexe de $\mathbb{R}^p$.
- L'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe.
- On appelle polyèdre convexe de $\mathbb{R}^p$ l'intersection (supposée non vide) d'une famille finie de demi-espaces fermés de $\mathbb{R}^p$

Tout polyèdre borné est appelé polytope. Aussi tout polyèdre est un convexe.

Définition

- *Une solution est réalisable (ou admissible) si elle satisfait toutes les contraintes*
- *l'ensemble de tous les points réalisables s'appelle domaine réalisable ou région admissible.*
- *Une solution est dite optimale si elle est une solution admissible qui réalise l'optimum de la fonction d'objectif sur le domaine réalisable.*

D'un point de vue géométrique, chaque contrainte linéaire représente un hyperplan. Leurs intersections forment un polyédre convexe ; c'est le domaine réalisable du problème, on le note par D .

Le problème linéaire peut être résolu graphiquement en suivant cette démarche :

1. Dans un repère orthonormé, dessiner les demi-plans (ou espaces) des contraintes, puis déterminer le domaine réalisable D .
2. Tracer l'hyperplan représentant la fonction d'objectif et passant par l'origine (i.e l'hyperplan $\Delta_0 : Z(x) = 0$) puis selon le type de (PL) indiquer, par une flèche, le sens de déplacement qui fait maximiser ou minimiser la fonction d'objectif.
3. Enfin déplacer l'hyperplan Δ_0 parallèlement à lui-même dans la région réalisable. Trouver la droite Δ_{max} la plus éloignée de Δ_0 dans le sens de la flèche. Enfin, l'ensemble des points d'intersection Δ_{max} et D sont les solutions optimales.

Exemple

Résoudre le problème introductif par la méthode graphique.

$$\begin{cases} \max[Z(x_1, x_2) = 20x_1 + 30x_2] \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il s'agit de chercher à l'intérieur du domaine réalisable D le couple (x_1, x_2) maximisant la fonction objectif.

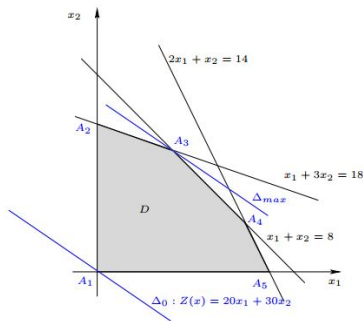


FIGURE – Domaine réalisable de l'exemple 1

Dans la figure 1, la droite parallèle à Δ_0 pour laquelle Z atteint son maximum dans la région admissible correspond à Δ_{max} . Donc la valeur optimale Z_{max} vaut 210 ce qui correspond à l'unique solution optimale $(x_1, x_2) = (3, 5)$. Donc, la stratégie optimale consiste à fabriquer trois lots de Pile 1 et cinq lots de Pile 2.

Théorème

L'ensemble des solutions D admissibles d'un problème de programmation linéaire est soit :

- *Un polytope.*
- *Un polyèdre non borné.*
- *Un ensemble vide.*

Si D est un ensemble vide, le problème n'a pas de solution optimale.

Si D est un polytope : on peut avoir deux cas :

- Soit la solution optimale est unique et située en un sommet de D (comme pour l'exemple 1).
- Soit il existe une infinité de solutions optimales qui sont les points d'une face de D , ces solutions optimales sont donc combinaison convexe d'un nombre fini de sommets.

Par exemple si on change la fonction d'objectif de l'exemple 1 par :

$Z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, l'ensemble des solutions optimales est le segment de $[A_3, A_4]$. Toute solution optimale x_{op} peut s'écrire comme une combinaison convexe de coordonnée des sommets A_3 et A_4 :

$x_{op} = tx_1 + (1 - t)x_2$ avec $t \in [0, 1]$, x_3 et x_4 sont les coordonnées des points A_3 et A_4 .

Si D est un polyèdre convexe non borné, en plus des situations décrites ci-dessus, il est possible que le problème n'admette aucune solution optimale et $\sup_{x \in D} Z(x) = \infty$.

Par exemple si toutes les contraintes de l'exemple 1 sont de type $\geq$, le problème n'admet aucune solution optimale et la valeur de la fonction d'objectif est l'infinie, fig2.

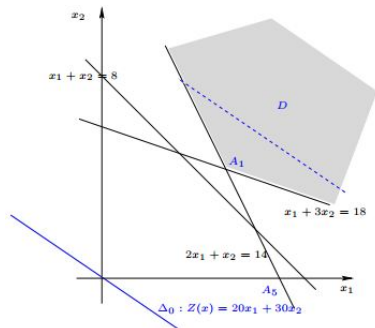


FIGURE – Domaine réalisable n'ayant pas de solution optimale finie

Pour un (PL) donné, la fonction Z à optimiser est linéaire, elle est par conséquent convexe.

Définition

Un point A d'un polyèdre de $\mathbb{R}^p$ est appelé sommet, s'il existe p hyperplans frontières dont l'intersection est réduite à A .

Théorème

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe (resp concave) sur un polyèdre $\mathbb{D}$. Si f admet son maximum (resp minimum) global en un point de $\mathbb{D}$, il est aussi en un sommet de $\mathbb{D}$.

En se basant sur ce théorème, au lieu de calculer la valeur de la fonction d'objectif pour toutes les solutions réalisables du domaine (dont le nombre est infini), il suffit de la calculer seulement sur les sommets réalisables dont le nombre est fini.

Pour cela on trouve la méthode d'énumération des sommets : elle consiste à choisir p parmi $p + m$ contraintes, si le système a une solution unique, alors on résoud le système linéaire où les p contraintes sont à l'égalité. Si cette solution est satisfaite aux m contraintes restantes alors cette solution est un sommet, puis on calcule la fonction d'objectif correspondante à ces sommets. Enfin la solution optimale du (PL) est le sommet qui réalise l'optimum de la fonction d'objectif.

Exemple

Dans l'exemple introductif, on a 5 équations et 2 variables, donc on a au plus dix sommets possibles, mais seulement cinq qui sont réalisables, c'est à dire qu'ils vérifient toutes les autres contraintes. Donc on a besoin de résoudre cinq systèmes linéaires de Cramer. Par exemple le sommet (3, 5) est le résultat de la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

La valeur de la fonction d'objectif vaut : $Z(3, 5) = 210$

Un raisonnement simultané, les sommets réalisables du domaine sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 : (0, 0) \\ Z(0, 0) = 0 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} A_2 : (0, 6) \\ Z(0, 6) = 180 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} A_3 : (3, 5) \\ Z(3, 5) = 210 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} A_4 : (6, 2) \\ Z(6, 2) = 180 \end{array} \right. , \\ \left\{ \begin{array}{l} A_5 : (7, 0) \\ Z(7, 0) = 140 \end{array} \right.$$

L'optimum est atteint au sommet (3,5), puisque la valeur de Z atteint son maximum en ce point.

Mais cette méthode est très coûteuse en temps de calcul, car un sommet est l'intersection de p hyperplans parmi les $m + p$ contraintes du domaine réalisable, donc il y a C_{m+p}^p intersections possibles. Par exemple pour 100 variables et 10 contraintes, il y a au plus $C_{110}^{100} = 1370$ milliards de sommets.

Un autre inconvénient de cette méthode : elle n'est applicable que lorsqu'on est sûr que le (PL) admet une solution optimale finie, ce qui est souvent difficile à vérifier.