

Simplification des fonctions logiques

Algébrique et graphique

TD 2-3 : Algèbre de Boole & Portes Logiques

Exercice 1

Établir les tables de vérité des fonctions suivantes, puis les écrire sous les deux formes canoniques :

1. $F_1 = XY + YZ + XZ$
2. $F_2 = X + YZ + \overline{Y} \overline{Z} T$
3. $F_3 = (X + Y)(\overline{X} + Y + Z)$
4. $F_4 = (\overline{X} + \overline{Z})(X + \overline{T} + Z)Y \overline{Z}$
5. $F_5 = (\overline{X}Y + X\overline{Y})\overline{Z} + (\overline{X}\overline{Y} + XY)Z$
6. $F_6 = \overline{X} + YZ$
7. $F_7 = \overline{X} \overline{Y} Z + X \overline{Y} Z + X \overline{Y} \overline{Z} + XY \overline{Z} + XYZ$
8. $F_8 = (\overline{X} + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})(X + Y + \overline{Z})(X + Y + Z)$

Exercice 2

Complémenter les expressions suivantes (sans simplification) :

1. $F_1 = \overline{X} \overline{Y} + XY + \overline{X} Y$
2. $F_2 = X(\overline{Y} \overline{Z} + YZ) + \overline{X} Y \overline{Z} + \overline{X} \overline{Y} Z$
3. $F_3 = X \overline{Y} + Z \overline{T} + \overline{X} \overline{Y} + \overline{Z} \overline{T}$
4. $F_4 = X \overline{Y} Z \overline{T} + \overline{X} Y T + \overline{X} \overline{Z} + (Z + T)(X \overline{Y} + Z)$
5. $F_5 = (X + Y)(\overline{X} + Z)$
6. $F_6 = (\overline{X} + \overline{Y} \overline{Z} T)(XY + Z + \overline{T})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$

Exercice 3

Écrire sous la première forme canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

1. $f(A, B, C) = 1$ si et seulement si aucune des variables A, B, C ne prend la valeur 1

2. $f(A, B, C) = 1$ si et seulement si au plus une des variables A, B, C prend la valeur 0
3. $f(A, B, C) = 1$ si et seulement si exactement une des variables A, B, C prend la valeur 1
4. $f(A, B, C) = 1$ si et seulement si au moins l'une des variables A, B, C prend la valeur 0
5. $f(A, B, C) = 1$ si et seulement si exactement deux des variables A, B, C prennent la valeur 1
6. $f(A, B, C) = 1$ si et seulement si au moins deux des variables A, B, C prennent la valeur 0
7. $f(A, B, C) = 1$ si et seulement si les variables A, B, C prennent la valeur 1

Exercice 4

Mettre les fonctions de l'exercice précédent sous la seconde forme canonique.

Exercice 5

Écrire sous la seconde forme canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

1. $g(A, B, C) = 0$ si et seulement si aucune des variables A, B, C ne prend la valeur 1
2. $g(A, B, C) = 0$ si et seulement si au plus une des variables A, B, C prend la valeur 0
3. $g(A, B, C) = 0$ si et seulement si exactement une des variables A, B, C prend la valeur 1
4. $g(A, B, C) = 0$ si et seulement si au moins l'une des variables A, B, C prend la valeur 0
5. $g(A, B, C) = 0$ si et seulement si exactement deux des variables A, B, C prennent la valeur 1
6. $g(A, B, C) = 0$ si et seulement si au moins deux des variables A, B, C prennent la valeur 0
7. $g(A, B, C) = 0$ si et seulement si les variables A, B, C prennent la valeur 1

Exercice 6

Mettre les fonctions de l'exercice précédent sous la première forme canonique.

Exercice 7

Démontrer les relations suivantes :

1. $AB + ACD + \overline{B}D = AB + \overline{B}D$
2. $(\overline{A} + B)(A + C)(B + C) = (\overline{A} + B)(A + C)$
3. $AB + \overline{B}C = (A + \overline{B})(B + C)$
4. $\overline{AB + \overline{A}B} = AB + \overline{A}B$
5. $\overline{(A + B)(\overline{A} + C)} = (A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$

Exercice 8

Simplifier algébriquement les fonctions suivantes :

1. $F_1 = (X + Y)(\bar{X} + Y)$
2. $F_2 = \bar{X}\bar{Y} + XY + \bar{X}Y$
3. $F_3 = XY + \bar{Z} + Z(\bar{X} + \bar{Y})$
4. $F_4 = X(\bar{Y}\bar{Z} + YZ) + \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z$
5. $F_5 = (X + \bar{Y})(X\bar{Y} + Z)Z$
6. $F_6 = X\bar{Y} + Z\bar{T} + \bar{X}\bar{Y} + \bar{Z}\bar{T}$
7. $F_7 = (X + Y + Z)(\bar{X} + Y + Z) + XY + YZ$

Exercice 9

Simplifier, par la méthode des diagrammes de Karnaugh, les fonctions booléennes suivantes :

1. $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$
2. $F(A, B, C) = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C}$
3. $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$
4. $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$
5. $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C}$
6. $F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$, sachant que la valeur de F pour les états $\bar{A}BC$ et ABC est indifférente.
7. $F(A, B, C) = (A + B + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + C)$
Utiliser les zéros du tableau de Karnaugh et donner le résultat sous forme conjonctive.

Exercice 10

Simplifier, par la méthode des diagrammes de Karnaugh, les fonctions booléennes suivantes :

1. $F(A, B, C, D) = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D}$
2. $F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$
3. $F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$
4. $F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D$
5. $F(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$
6. $F(A, B, C, D) = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD + ABCD + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$

7. $F(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$
8. $F(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD$
9. $F(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD$
10. $F(A,B,C,D) = (A+B+C+D)(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$

Donner le résultat sous les deux formes algébriques, conjonctive et disjonctive.

$$11. F(A,B,C,D) = (A+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$$

Même question que précédemment.

$$12. F(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD, \text{ sachant que deux combinaisons de variables sont impossibles : } AB\overline{C}D, \text{ et } \overline{A}\overline{B}CD.$$

$$13. F(A,B,C,D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD, \text{ sachant que quatre combinaisons de variables sont impossibles : } AB\overline{C}D, ABCD, \overline{A}\overline{B}CD, \text{ et } \overline{A}\overline{B}C\overline{D}.$$

14. $F(A,B,C,D)$ prend la valeur 1 pour les combinaisons suivantes des variables booléennes A, B, C , et D : $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}, \overline{A}\overline{B}\overline{C}D, \overline{A}\overline{B}C\overline{D}, \overline{A}\overline{B}CD, A\overline{B}\overline{C}\overline{D}, A\overline{B}\overline{C}D, A\overline{B}C\overline{D}, A\overline{B}CD$. La valeur de F peut être quelconque pour les combinaisons $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D, \overline{A}\overline{B}CD, A\overline{B}\overline{C}\overline{D}, A\overline{B}C\overline{D}, \text{ et } \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$.

15. $F(A,B,C,D)$ prend la valeur 1 pour les combinaisons suivantes des variables booléennes A, B, C , et D : $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}, \overline{A}\overline{B}\overline{C}D, \overline{A}\overline{B}C\overline{D}, \overline{A}\overline{B}CD, A\overline{B}\overline{C}\overline{D}, A\overline{B}\overline{C}D, A\overline{B}C\overline{D}, A\overline{B}CD$. La valeur de F peut être quelconque pour les combinaisons $\overline{A}\overline{B}\overline{C}D, \overline{A}\overline{B}C\overline{D}, A\overline{B}\overline{C}\overline{D}, A\overline{B}C\overline{D}, \text{ et } ABCD$. Donner une expression simplifiée sous forme disjonctive (utilisation des 1), puis sous forme conjonctive (utilisation des 0).

Exercice 11

Simplifier, par la méthode des diagrammes de Karnaugh, les fonctions booléennes de 5 variables suivantes :

$$1. F(A,B,C,D,E) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{B}CD\overline{E} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} + A\overline{B}\overline{C}D\overline{E} + A\overline{B}C\overline{D}\overline{E} + A\overline{B}CD\overline{E} + ABC\overline{D}\overline{E} + ABCD\overline{E} + ABC\overline{D}E + ABCDE + ABC\overline{D}\overline{E} + ABCD\overline{E} + ABC\overline{D}E + ABCDE$$

$$2. F(A,B,C,D,E) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{B}CD\overline{E} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} + A\overline{B}\overline{C}D\overline{E} + A\overline{B}C\overline{D}\overline{E} + A\overline{B}CD\overline{E} + ABC\overline{D}\overline{E} + ABCD\overline{E} + ABC\overline{D}E + ABCDE + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}E + \overline{A}\overline{B}\overline{C}DE + \overline{A}\overline{B}CDE$$

Exercice 12

Soit la fonction F de l'exercice 10, n° 11. Donner les schémas logiques ou logigrammes de la fonction simplifiée utilisant :

- logigramme 1 : des portes NON ET, à partir de la forme simplifiée disjonctive,
- logigramme 2 : des portes NON OU, à partir de la forme simplifiée conjonctive,
- logigramme 3 : des portes ET, OU, et des inverseurs, à partir d'une des deux formes.

Exercice 13

Donner les schémas logiques des fonctions suivantes, en utilisant

1. des portes ET, OU, et des inverseurs,
2. des portes NON ET et des inverseurs,
3. des portes NON OU et des inverseurs.

$$F_1 = (A + B).CD$$

$$F_2 = A(B + \overline{C}) + \overline{B}C$$

$$F_3 = A\overline{D} + BC$$

$$F_4 = (B + \overline{C})(A + BD)$$

On ne demande pas de simplifier les fonctions au préalable.

Exercice 14

Les conditions de délivrance de la police d'assurance n° 15 sont les suivantes :

- avoir souscrit à la police n° 10, être du sexe masculin et marié,
- ou
- n'avoir pas souscrit à la police n° 10, être du sexe féminin et mariée,
- ou
- avoir souscrit à la police n° 10, être marié et âgé de moins de 25 ans,
- ou
- être marié(e) et avoir plus de 25 ans,
- ou
- être du sexe masculin et âgé de moins de 25 ans.

Exprimer sous forme d'une expression logique la condition de délivrance de la police d'assurance n° 15 en utilisant la méthode de simplification de Karnaugh. Tracer le logigramme correspondant à l'aide de portes NON ET.

Exercice 15

Trois interrupteurs I_1 , I_2 , et I_3 commandent le démarrage de deux moteurs M_1 et M_2 selon les conditions suivantes :

- le moteur M_1 ne doit démarrer que si au moins deux interrupteurs sont fermés ($I_i = 1$),
- dès qu'un ou plusieurs interrupteurs sont activés, le moteur M_2 doit démarrer.

Réaliser un circuit logique permettant de réaliser M_1 et M_2 avec des opérateurs NON ET.

Exercice 16

Un distributeur de boissons chaudes permet de distribuer du café ou du thé, avec ou sans lait, ou du lait seul.

Trois boutons permettent de commander le distributeur : « café », « thé », « lait ». Pour obtenir l'une de ces boissons seule, il suffit d'appuyer sur le bouton correspondant. Pour obtenir une boisson avec lait, il faut appuyer en même temps sur le bouton correspondant à la boisson choisie et sur le bouton « lait ».

De plus, le distributeur ne fonctionne que si un jeton a préalablement été introduit dans la fente de l'appareil. Une fausse manœuvre après introduction du jeton (par exemple, appui simultané sur « café » et « thé ») provoque la restitution du jeton. Le lait étant gratuit, le jeton est également restitué si du lait seul est choisi.

Calculer et simplifier les fonctions de restitution du jeton, J , de distribution du café, C , du thé T , et du lait, L . On notera que la fonction de restitution du jeton peut indifféremment être active ou non lorsque aucun jeton n'est introduit dans l'appareil.