

Chapitre 1

SYSTEMES DE NUMERATION ET CODAGE DES INFORMATIONS**1. OBJECTIFS**

- Traiter en détails les différents systèmes de numération : systèmes décimal, binaire, octal et hexadécimal ainsi que les méthodes de conversion entre les systèmes de numération.
- Traiter les opérations arithmétiques sur les nombres.
- Etudier plusieurs codes numériques tels que les codes DCB, GRAY et ASCII.

2. SYSTEMES DE NUMERATION

Pour qu'une information numérique soit traitée par un circuit, elle doit être mise sous forme adaptée à celui-ci. Pour cela Il faut choisir un système de numération de base B (B un nombre entier naturel ≥ 2)

De nombreux systèmes de numération sont utilisés en technologie numérique. Les plus utilisés sont les systèmes : Décimal (base 10), Binaire (base 2), Tétral (base 4), Octal (base 8) et Hexadécimal (base 16).

Le tableau ci-dessous représente un récapitulatif sur ces systèmes :

Décimal	Binaire	Tétral	Octal	Hexadécimal
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	3	3	3
4	100	10	4	4
5	101	11	5	5
6	110	12	6	6
7	111	13	7	7
8	1000	20	10	8
9	1001	21	11	9
10	1010	22	12	A
11	1011	23	13	B
12	1100	30	14	C
13	1101	31	15	D
14	1110	32	16	E
15	1111	33	17	F

2.1 Représentation polynomiale

Tout nombre **N** peut se décomposer en fonction des puissances entières de la base de son système de numération. Cette décomposition s'appelle la forme polynomiale du nombre **N** et qui est donnée par :

$$N = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + a_{n-2} B^{n-2} + \dots + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0$$

- **B** : Base du système de numération, elle représente le nombre des différents chiffres qu'utilise ce système de numération.
- **a_i** : un chiffre (ou digit) parmi les chiffres de la base du système de numération.
- **i** : rang du chiffre **a_i**.

2.2 Système décimal (base 10)

Le système décimal comprend 10 chiffres qui sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} c'est un système qui s'est imposé tout naturellement à l'homme qui possède 10 doigts. Ecrivons quelques nombres décimaux sous la forme polynomiale :

Exemples :

$$(5462)_{10} = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

$$(239.537)_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$$

2.3 Système binaire (base 2)

Dans ce système de numération il n'y a que deux chiffres possibles {0, 1} qui sont souvent appelés bits « binary digit ». Comme le montre les exemples suivants, un nombre binaire peut s'écrire sous la forme polynomiale.

Exemples :

$$(111011)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$(10011.1101)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$$

2.4 Système tétral (base 4)

Ce système appelé aussi base 4 comprend quatre chiffres possibles {0, 1, 2, 3}. Un nombre tétral peut s'écrire sous la forme polynomiale comme le montre les exemples suivant :

Exemples :

$$(2331)_4 = 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

$$(130.21)_4 = 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} + 1 \cdot 4^{-2}$$

Système Octal (base 8)

Le système octal ou base 8 comprend huit chiffres qui sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Les chiffres 8 et 9 n'existent pas dans cette base. Ecrivons à titre d'exemple, les nombres 4527_8 et 1274.632_8 :

Exemples :

$$(4527)_8 = 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$$

$$(1274.632)_8 = 1 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} + 3 \cdot 8^{-2} + 2 \cdot 8^{-3}$$

2.5 Système Hexadécimal (base 16)

Le système Hexadécimal ou base 16 contient seize éléments qui sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Les chiffres A, B, C, D, E, et représentent respectivement 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

Exemples :

$$(3256)_{16} = 3 \cdot 16^3 + 2 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0$$

$$(9C4F)_{16} = 9 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$$

$$(A2B.E1)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 + 14 \cdot 16^{-1} + 1 \cdot 16^{-2}$$

3. CHANGEMENT DE BASE

Il s'agit de la conversion d'un nombre écrit dans une base B_1 à son équivalent dans une autre base B_2

3.1 Conversion d'un nombre N de base B en un nombre décimal

La valeur décimale d'un nombre N , écrit dans une base B , s'obtient par sa forme polynomiale décrite précédemment.

Exemples :

$$(1011101)_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (93)_{10}$$

$$(231102)_4 = 2 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = (2898)_{10}$$

$$(7452)_8 = 7 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = (3882)_{10}$$

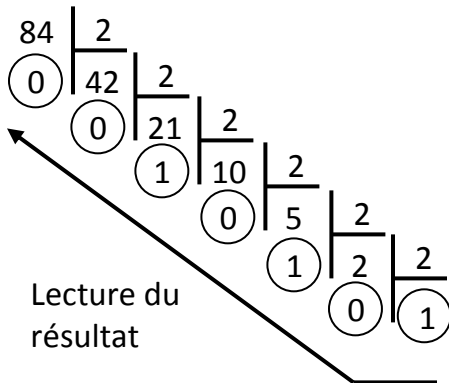
$$(D7A)_{16} = 13 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = (3450)_{10}$$

3.1.1 Conversion d'un nombre décimal entier

Pour convertir un nombre décimal entier en un nombre de base B quelconque, il faut faire des divisions entières successives par la base B et conserver à chaque fois le reste de la division. On s'arrête lorsqu'on obtient un résultat inférieur à la base B . Le nombre recherché N dans la base B s'écrit de la gauche vers la droite en commençant par le dernier résultat allant jusqu'au premier reste.

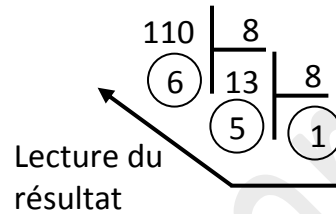
Exemples :

$$\Rightarrow (84)_{10} = (?)_2$$



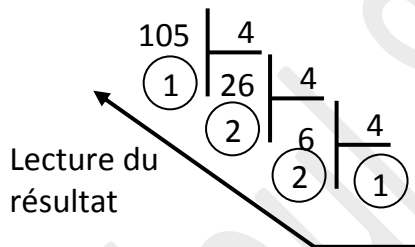
$$(84)_{10} = (1010100)_2$$

$$\Rightarrow (110)_{10} = (?)_8$$



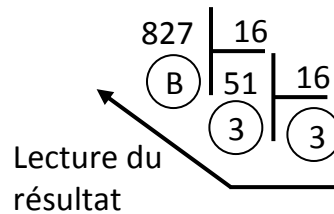
$$(110)_{10} = (156)_8$$

$$\Rightarrow (105)_{10} = (?)_4$$



$$(105)_{10} = (1221)_4$$

$$\Rightarrow (827)_{10} = (?)_{16}$$



$$(827)_{10} = (33B)_{16}$$

3.1.2 Conversion d'un nombre décimal à virgule

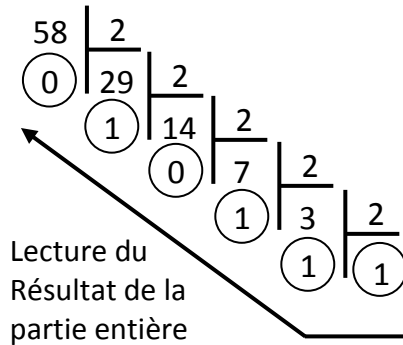
Pour convertir un nombre décimal à virgule dans une base **B** quelconque, il faut :

- ⊙ Convertir la partie entière en effectuant des divisions successives par **B** (comme nous l'avons vu précédemment).
- ⊙ Convertir la partie fractionnaire en effectuant des multiplications successives par **B** et en conservant à chaque fois le chiffre devenant entier.

Exemples :

Conversion du nombre (58,625) en base 2

⇒ Conversion de la partie entière



⇒ Conversion de la partie fractionnaire

$$0.625 * 2 = \boxed{1}.25$$

$$0.25 * 2 = \boxed{0}.5$$

$$0.5 * 2 = \boxed{1}.0$$

Lecture du
Résultat de la
partie
fractionnaire

$$(58.625)_{10} = (111010.101)_2$$

Remarques :

Parfois en multipliant la partie fractionnaire par la base **B** on n'arrive pas à convertir toute la partie fractionnaire. Ceci est dû essentiellement au fait que le nombre à convertir n'a pas un équivalent exacte dans la base **B** et sa partie fractionnaire est cyclique

Exemple : $(0.15)_{10} = (?)_2$

$$0.15 * 2 = \underline{0}.3$$

$$0.3 * 2 = \underline{0}.6$$

$$0.6 * 2 = \underline{1}.2$$

$$0.2 * 2 = \underline{0}.4$$

$$0.4 * 2 = \underline{0}.8$$

$$0.8 * 2 = \underline{1}.6$$

$$0.6 * 2 = \underline{1}.2$$

$$0.2 * 2 = \underline{0}.4$$

$$0.4 * 2 = \underline{0}.8$$

$$0.8 * 2 = \underline{1}.6$$

⇒ $(0.15)_{10} = (0.001001\underline{1001})_2$

On dit que le nombre $(0.15)_{10}$ est cyclique dans la base 2 de période **1001**.

3.1.3 Autres conversions

Pour faire la conversion d'un nombre d'une base quelconque B_1 vers une autre base B_2 il faut passer par la base **10**. Mais si la base B_1 et B_2 s'écrivent respectivement sous la forme d'une puissance de 2 on peut passer par la base 2 (binaire) :

Base tétrale (base 4) : $4=2^2$ chaque chiffre tétral se convertit tout seul sur 2 bits.

Base octale (base 8) : $8=2^3$ chaque chiffre octal se convertit tout seul sur 3 bits.

Base hexadécimale (base 16) : $16=2^4$ chaque chiffre hexadécimal se convertit tout seul sur 4 bits.

Exemples :

$$\odot (1\ 0\ 2\ 2\ 3)_4 = (\underline{01}\ \underline{00}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{11})_2$$

$$\odot (6\ 5\ 3\ 0)_8 = (\underline{110}\ \underline{101}\ \underline{011}\ \underline{000})_2$$

$$\odot (9\ A\ 2\ C)_{16} = (\underline{1001}\ \underline{1010}\ \underline{0010}\ \underline{1100})_2$$

$$\odot (7\ E\ 9)_{16} = (\underline{13}\ \underline{32}\ \underline{21})_4$$

$$\odot (11 \ 10 \ 01 \ 00 \ 10)_2 = (3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2)_4$$

$$\odot (101 \ 010 \ 100 \ 111 \ 000)_2 = (5 \ 2 \ 4 \ 7 \ 0)_8$$

$$\odot (1101 \ 1000 \ 1011 \ 0110)_2 = (D \ 8 \ B \ 6)_8$$

4. LES OPERATIONS DANS LES BASES

On procède de la même façon que celle utilisée dans la base décimale, Ainsi, il faut effectuer l'opération dans la base 10, ensuite convertir le résultat par colonne la base **B**.

4.1 Addition

Base Binaire	
$ \begin{array}{r} 11001001 \\ + \quad 110101 \\ \hline = (11111110)_2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1101110 \\ + \quad 100010 \\ \hline = (10010000)_2 \end{array} $

Base Tétrale	
$ \begin{array}{r} 32210 \\ + \quad 1330 \\ \hline = (100200)_4 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 20031 \\ + \quad 1302 \\ \hline = (21333)_4 \end{array} $

Base Octale	
$ \begin{array}{r} 63375 \\ + \quad 7465 \\ \hline = (73062)_8 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 5304 \\ + \quad 6647 \\ \hline = (14153)_8 \end{array} $

Base hexadécimale	
$ \begin{array}{r} 89A27 \\ + \quad EE54 \\ \hline = (9887B)_{16} \end{array} $	$ \begin{array}{r} 5304 \\ + \quad CC3B \\ \hline = (11F3F)_{16} \end{array} $

4.2 Soustraction

Base Binaire	
$ \begin{array}{r} 1110110 \\ - \quad 110101 \\ \hline = (1000001)_2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1000001001 \\ - \quad 11110011 \\ \hline = (100010110)_2 \end{array} $

Base Tétrale	
$ \begin{array}{r} 13021 \\ - \quad 2103 \\ \hline = \quad (10312)_4 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2210 \\ - \quad 1332 \\ \hline = \quad (21333)_4 \end{array} $

Base Octale	
$ \begin{array}{r} 52130 \\ - \quad 6643 \\ \hline = \quad (43265)_8 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 145126 \\ - \quad 75543 \\ \hline = \quad (47363)_8 \end{array} $

Base Hexadécimal	
$ \begin{array}{r} 725B2 \\ - \quad FF29 \\ \hline = \quad (62689)_{16} \end{array} $	$ \begin{array}{r} 45DD3 \\ - \quad 9BF6 \\ \hline = \quad (3C1DD)_{16} \end{array} $

4.3 Multiplication

Base Binaire	
$ \begin{array}{r} 1110110 \\ * \quad 11011 \\ \hline 1110110 \\ 1110110 \\ 1110110 \\ 1110110 \\ \hline = (110001110010)_2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1010111 \\ * \quad 10011 \\ \hline 1010111 \\ 1010111 \\ 1010111 \\ \hline = (11001110101)_2 \end{array} $

Base Tétrale	
$ \begin{array}{r} 3021 \\ * \quad 113 \\ \hline 21123 \\ 3021 \\ 3021 \\ \hline = (1020033)_4 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 13320 \\ * \quad 210 \\ \hline 13320 \\ 33300 \\ \hline = (10123200)_4 \end{array} $

Base Octale	
$ \begin{array}{r} 7506 \\ * \quad 243 \\ \hline 26722 \\ 36430 \\ 17214 \\ \hline = (2334622)_8 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 4327 \\ * \quad 651 \\ \hline 4327 \\ 26063 \\ 32412 \\ \hline = (3526357)_8 \end{array} $

Base Hexadécimale	
$ \begin{array}{r} \text{A928} \\ * \quad \text{7D3} \\ \hline \text{1FB78} \\ \text{89708} \\ \text{4A018} \\ \hline = (52\text{B83F8})_{16} \end{array} $	$ \begin{array}{r} \text{6340} \\ * \quad \text{B51} \\ \hline \text{6340} \\ \text{1F040} \\ \text{443C0} \\ \hline = (4632740)_{16} \end{array} $

4.4 Division

Base Binaire	Base Tétrale
$ \begin{array}{r} 11000000110 \quad \quad 1110010 \\ - 1110010 \downarrow \\ \hline 10011100 \quad \quad 11011 \\ - 1110010 \downarrow \\ \hline 10101011 \quad \\ - 1110010 \downarrow \\ \hline 1110010 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 300012 \quad \quad 1302 \\ - 1302 \downarrow \\ \hline 10321 \quad \quad 123 \\ - 3210 \downarrow \\ \hline 11112 \end{array} $

Base Octale	Base Hexadécimale
$ \begin{array}{r} 50064 \quad \quad 72 \\ - 442 \downarrow \\ \hline 366 \quad \quad 542 \\ - 350 \downarrow \\ \hline 164 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 24328 \quad \quad 2\text{B} \\ - 22\text{F} \downarrow \\ \hline 142 \quad \quad \text{D78} \\ - 12\text{D} \downarrow \\ \hline 158 \end{array} $

5. CODAGE DE L'INFORMATION

Le codage de l'information est nécessaire pour le traitement automatique de celui-ci. Parmi les codes les plus rencontrés, autre que le code binaire naturel on cite le code **DCB**, le code **GRAY**, le code **p** parmi **n**, le code ASCII ...

5.1 Les codes numériques

5.1.1 Le code binaire Naturel

C'est une représentation numérique des nombres dans la base 2

Décimal	Code Binaire Naturel			
	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

- ➔ Ce code présente l'inconvénient de changer plus qu'un seul bit quand on passe d'un nombre à un autre immédiatement supérieur.

5.1.2 Le code binaire réfléchi (code GRAY)

Son intérêt réside dans des applications d'incrémentations où un seul bit change d'état à chaque incrémentations.

Décimal	Code Binaire Naturel				Code Binaire Réfléchi			
	a_3	a_2	a_1	a_0	a'_3	a'_2	a'_1	a'_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	0

Remarques :

⊙ Conversion du Binaire Naturel vers le Binaire Réfléchi : il s'agit de comparer les bits b_{n+1} et le bit b_n du binaire naturel, le résultat est b_r du binaire réfléchi qui vaut 0 si $b_{n+1}=b_n$ ou 1 sinon. Le premier bit à gauche reste inchangé.

$(6)_{10}=?_{BR}$	$(10)_{10}=?_{BR}$
$(6)_{BN} = 1 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow 0$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $(6)_{BR} = 1 \quad 0 \quad 1$ $(6)_{10}=(110)_{BN}=(101)_{BR}$	$(10)_{BN} = 1 \longleftrightarrow 0 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow 0$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ $(10)_{BR} = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$ $(10)_{10}=(1010)_{BN}=(1111)_{BR}$

⊙ Conversion du Binaire Réfléchi vers le Binaire Naturel: il s'agit de comparer le bit b_{n+1} du binaire naturel et le bit b_n du binaire réfléchi le résultat est b_n du binaire naturel qui vaut 0 si $b_{n+1}=b_n$ ou 1 sinon. Le premier bit à gauche reste inchangé.

$(10)_{10}=(?)_{BN}$	$(13)_{10}=(?)_{BN}$
$(10)_{BR} = 1$ $(10)_{BN} = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0$ $(10)_{10}=(1111)_{BR}=(1010)_{BN}$	$(13)_{BR} = 1$ $(13)_{BN} = 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$ $(13)_{10}=(1011)_{BR}=(1101)_{BN}$

5.1.2 Le code décimal codé binaire (code DCB)

Sa propriété est d'associer 4 bits représentant chaque chiffre en binaire naturel. L'application la plus courante est celle de l'affichage numérique où chaque chiffre est associé à un groupe de 4 bits portant le code DCB.

Exemples :

⊙ $(9\ 4\ 2\ 7)_{10} = (\underline{1001}\ \underline{0100}\ \underline{0010}\ \underline{0111})_{DCB}$

⊙ $(6\ 8\ 0\ 1)_{10} = (\underline{0110}\ \underline{1000}\ \underline{0000}\ \underline{0001})_{DCB}$

5.1.3 Le code P parmi N

Le code P parmi N est un code à N bits dont P bits sont à 1 et (N-P) bits sont à 0. La lecture de ce code peut être associée à la vérification du nombre des 1 et des 0 dans l'information, ce qui permet de contrôler l'information lue par la détection du code erroné.

Exemple : code 2 parmi 5

Décimal	Code 2 parmi 5				
	a_7	a_4	a_2	a_1	a_0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	1	0	0	0	1
8	1	0	0	1	0
9	1	0	1	0	0

5.1.3 Le code ASCII

Le code ASCII (American Standard Code for information interchange) est un code alphanumérique, devenu une norme internationale. Il est utilisé pour la transmission entre ordinateurs ou entre un ordinateur et des périphériques. Sous sa forme standard, il utilise 7 bits. Ce qui permet de générer $2^7=128$ caractères. Ce code représente les lettres alphanumériques majuscules et minuscules, les chiffres décimaux, des signes de ponctuation et des caractères de commande.

Chaque code est défini par 3 bits d'ordre supérieur $b_6b_5b_4$ et 4 bits d'ordre inférieur $b_3b_2b_1b_0$. Ainsi le caractère "A" a pour code hexadécimal 41_H

Exemple :

A $\Rightarrow (65)_{ASCII} \Rightarrow (01000001)_2 \Rightarrow (41)_H$

B $\Rightarrow (66)_{ASCII} \Rightarrow (01000010)_2 \Rightarrow (42)_H$

Z $\Rightarrow (90)_{ASCII} \Rightarrow (01011010)_2 \Rightarrow (5A)_H$

a $\Rightarrow (97)_{ASCII} \Rightarrow (01100001)_2 \Rightarrow (61)_H$

b $\Rightarrow (98)_{ASCII} \Rightarrow (01100010)_2 \Rightarrow (62)_H$

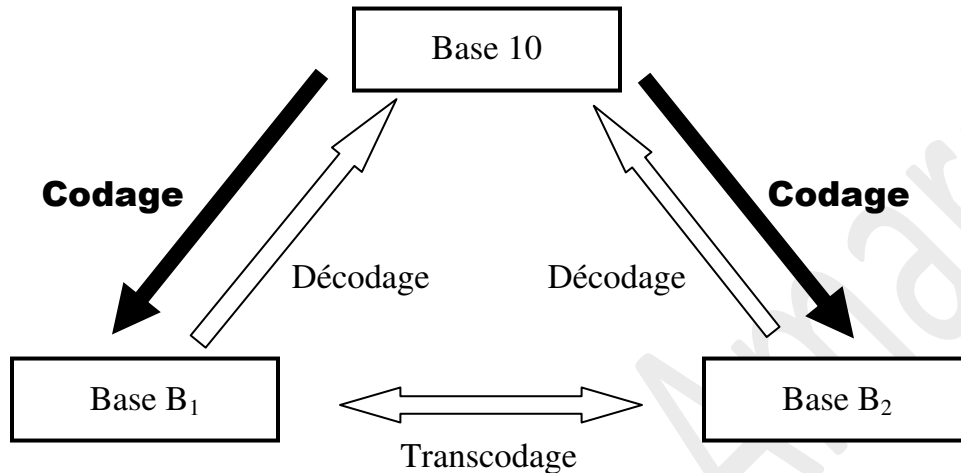
z $\Rightarrow (122)_{ASCII} \Rightarrow (01111010)_2 \Rightarrow (7A)_H$

[$\Rightarrow (91)_{ASCII} \Rightarrow (01011011)_2 \Rightarrow (5B)_H$

{ $\Rightarrow (123)_{ASCII} \Rightarrow (01111011)_2 \Rightarrow (7B)_H$

5.2 Le Transcodage

Une des applications liée au codage des informations est le passage d'un code à un autre. Cette opération est appelée transcodage :



- ➔ Le codage des informations se fait au moyen d'un circuit combinatoire appelé **Codeur**.
- ➔ Le décodage des informations se fait au moyen d'un circuit combinatoire appelé **Décodeur**.
- ➔ Un transcodeur est un **Décodeur** associé à un **Codeur**.