

CHAPITRE 2

Algèbre de Boole

Plan du Chapitre

- Objectifs du chapitre
- Opérateurs de l'algèbre de Boole
- Théorèmes de l'algèbre de Boole
- Représentation d'une fonction logique
- Simplification des expressions logiques

Objectifs du chapitre

- Pour étudier d'une manière systématique les circuits numériques, on utilise une algèbre différente de l'algèbre classique, dite algèbre de Boole, du nom du mathématicien anglais, inventeur de ce concept (George Boole 1815-1864).
- Nous proposons dans ce chapitre les lois, règles et théorèmes de l'algèbre de Boole, nécessaires et suffisants pour la compréhension du fonctionnement de ces circuits numériques.
- Nous étudierons également la simplification des expressions booléennes en utilisant les règles de l'algèbre de Boole et les diagrammes de Karnaugh

Opérateurs de l'algèbre de Boole

- L'algèbre de Boole est un ensemble de variables à deux états (0 et 1) dites aussi booléennes, muni de trois opérateurs élémentaires :
 - - La multiplication logique, dite aussi ET. Le symbole de cette opération est ($\cdot$)
 - - L'addition logique, dite aussi OU. Le symbole de cette opération est ($+$).
 - - L'inverse logique, dite aussi NON. Le symbole de cette opération est ($--$).

- *Opérateur ET*

Si deux variables logiques A et B sont combinées par la multiplication logique (ET), le résultat s'exprime ainsi :

$$X = A.B$$

Cela se traduit par l'expression suivante :

Si A est vraie ET B est vraie alors X est vraie.

A	B	X=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de l'opérateur ET

- *Opérateur OU*

L'addition logique de deux variables A et B donne :

$$X = A + B$$

Cela se traduit par l'expression suivante : X est vrai si au moins A ou B est vrai.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>$X=A+B$</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table de vérité de l'opérateur OU

- *Opérateur inverseur*

L'opérateur inverseur, contrairement aux opérateurs précédents, est un opérateur à une seule variable. Le résultat X de l'opérateur inverseur sur une variable booléenne A donne son complément. On note :

$$X = \bar{A}$$

La table de vérité de l'opérateur inverseur est donnée par le tableau suivant.

A	$X = \bar{A}$
0	1
1	0

Table de vérité de l'opérateur inverseur

Théorèmes de l'algèbre de Boole

Théorème de commutativité	$A + B = B + A$ $A.B = B.A$
Théorème d'associativité	$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ $A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C$
Théorème de distributivité	$A.(B + C) = A.B + A.C$ $A + (B.C) = (A + B).(A + C)$
Théorème d'idempotence	$A + A = A$ $A.A = A$
Théorème de complémentation	$A + \overline{A} = 1$ $A.\overline{A} = 0$
Théorème des constantes	$A.1 = A$ $A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A.0 = 0$
Théorème d'absorption	$A + A.B = A$ $A.(A + B) = A$
Théorème d'allègement	$A + \overline{A}.B = A + B$ $A.(A + B) = A.B$
Théorème de Morgan	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A+B} = \overline{A} . \overline{B}$ Ce théorème peut être généralisé à plusieurs variables : $\overline{A.B.....Z} = \overline{A} + \overline{B} + ... + \overline{Z}$ $\overline{A+B+....+Z} = \overline{A} . \overline{B} \overline{Z}$

Représentation d'une fonction logique

Représentation algébrique

<i>Formes</i>	<i>Exemples</i>
Somme Une fonction est écrite sous la forme de somme, si elle est constituée de plusieurs termes reliés entre eux par l'opérateur OU (appelée aussi forme disjonctive).	$X_1 = A + B$ $X_2 = A + B.\bar{C}$ $X_3 = A.(\bar{B} + C) + B.D.(\overline{A + C})$
Produit Une fonction est écrite sous la forme de produit, si elle est constituée de plusieurs facteurs reliés entre eux par l'opérateur ET (appelée aussi forme conjonctive).	$X_1 = A.B,$ $X_2 = A.(B + C).(D + E)$ $X_3 = (A + \bar{B}).(D + C)$
Somme canonique ($\Sigma.\Pi$) Une fonction logique est écrite sous forme de somme canonique si <u>toutes</u> les variables figurent dans chaque terme et si, dans chacun de ces termes, toutes les variables sont reliées entre elles par l'opérateur ET. Ces termes se désignent sous le nom de mintermes .	Soient les fonctions à 3 variables : $X_1 = \bar{A}.B.C + \bar{A}.\bar{B}.C$ $X_2 = A.B.C + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.C$
Produit canonique ($\Pi.\Sigma$) Une fonction logique est écrite sous forme de produit canonique si <u>toutes</u> les variables figurent dans chaque produit et si, dans chacun de ces termes, elles sont toutes reliées entre elles par l'opérateur OU. Ces produits se désignent sous le nom de maxtermes .	Soient les fonctions à 3 et à 4 variables suivants : $X_1 = (A + \bar{B} + C + D).(\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D})$ $X_2 = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}).(\bar{A} + B + C).(\bar{A} + \bar{B} + C)$

Représentation par une table de vérité

Une expression logique $X(A, B, C\dots)$, fonction des variables $A, B, C\dots$, peut être représentée par une table de vérité. Cette table donne les valeurs que peut prendre X , suivant les différentes combinaisons des variables $A, B, C\dots$

Exemple

: Soit $X(A,B,C)$ une fonction logique à trois variables, représentée par la table de vérité suivante:

C	B	A	X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1^{ère} forme canonique: Somme canonique ($\Sigma\Pi$)

X est vrai si

C=0 et B=0 et A=0 (ligne-0)
ou bien
C=0 et B=1 et A=0 (ligne-2)
ou bien
C=1 et B=0 et A=1 (ligne-5)
ou bien
C=1 et B=1 et A=1 (ligne-7)

Par conséquent X est vrai (X=1) si :

$$X = \overline{C}.\overline{B}.\overline{A} + \overline{C}.B.\overline{A} + C.\overline{B}.A + C.B.A$$

C'est un développement en somme de produits
chaque terme "produit" s'appelle minterme.

2^{ème} forme canonique: Produit canonique ($\Pi\Sigma$)

En s'intéressant aux 0 de X, on peut écrire de la même manière :

$$\overline{X} = \overline{C}.\overline{B}.A + \overline{C}.B.A + C.\overline{B}.\overline{A} + C.B.\overline{A}$$

$$X = \overline{\overline{C}.\overline{B}.A + \overline{C}.B.A + C.\overline{B}.\overline{A} + C.B.\overline{A}}$$

En appliquant le théorème de Morgan on obtient :

$$X = (C+B+\overline{A}).(C+\overline{B}+\overline{A}).(\overline{C}+B+A).(\overline{C}+\overline{B}+A)$$

C'est un développement en produit de sommes
chaque terme "somme" s'appelle maxterme.

Simplification des expressions logiques

La simplification d'une expression logique, consiste à réduire cette expression à sa forme la plus simple mais équivalente, c'est à dire à un nombre minimal de termes et à un nombre minimal de variables dans chaque terme.

Nous exposons dans ce qui suit deux méthodes de simplification :

- Simplification algébrique.
- Simplification graphique par le diagramme de Karnaugh.

Exemple-1:

$$\begin{aligned}X &= A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C \\&= A.B(C + \overline{C}) + A.\overline{B}.C \\&= A.B + A.\overline{B}.C \\&= A.(B + \overline{B}.C) \\&\text{or } X + \overline{X}.Y = X + Y \\X &= A.(B + C)\end{aligned}$$

Exemple-2:

$$\begin{aligned}Z &= (\overline{A} + B).(A + B + D).\overline{D} \\&= \overline{A}.A.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{D} + \overline{A}.D.\overline{D} + B.A.\overline{D} + B.B.\overline{D} + B.D.\overline{D} \\&\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\&\quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \\&= \overline{A}.B.\overline{D} + B.A.\overline{D} + B.\overline{D} \\&= B.\overline{D}.(\overline{A} + A) + B.\overline{D} \\&= B.\overline{D}.(\overline{A} + A + 1) \\&= B.\overline{D}\end{aligned}$$

Diagramme de Karnaugh

- Le diagramme de Karnaugh d'une table de vérité ou d'une fonction logique à N variables, est constitué d'un rectangle divisé en 2^N cases. Chaque case du diagramme correspond à l'une des 2^N combinaisons possibles des N variables (2^N mintermes).
- L'ordre des variables en abscisse et en ordonnée est choisi de telle sorte qu'entre deux cases adjacentes, il n'y a qu'une seule variable qui change de valeur (on codifie le tableau selon le code de Gray).

- Table de vérité à deux variables

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	1	0
B	0	1

- Table de vérité à trois variables

C	B	A	X
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	AB
$\overline{C}$	1	0	0	0
C	1	1	0	0

b/ Chercher le diagramme de Karnaugh correspondant à la fonction logique à quatre variables écrite sous forme de somme canonique suivante : $X = A.\bar{B}.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.C.\bar{D}$

	$\bar{A}.\bar{B}$	$\bar{A}.B$	$A.B$	$A.\bar{B}$
$\bar{C}.\bar{D}$	0	0	0	0
$\bar{C}.D$	0	0	0	0
$C.D$	0	0	0	1
$C.\bar{D}$	0	0	1	1

$$X = A.\bar{B}.C.D + A.\bar{B}.C.\bar{D} + A.B.C.\bar{D}$$

Déterminer le diagramme de Karnaugh correspondant à la fonction logique à trois variables, écrite sous forme de produit canonique suivante :

$$X = (\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + B + \bar{C})$$

Comme cette fonction X n'est pas écrite sous forme de somme canonique, son inverse $\bar{X}$ le sera d'après le théorème de De Morgan :

$$\bar{X} = A.\bar{B}.C + A.B.C + \bar{A}.\bar{B}.C$$

	$\bar{A}.\bar{B}$	$\bar{A}.B$	$A.B$	$A.\bar{B}$
$\bar{C}$	1	1	1	1
C	0	1	0	0

$$\bar{X} = A.\bar{B}.C + A.B.C + \bar{A}.\bar{B}.C$$

exercice

Déterminer les diagrammes de Karnaugh relatifs aux fonctions suivantes :

$$X_1 = A.\overline{B}.\overline{C} + A.B$$

$$X_2 = \overline{(A+B)} \left(\overline{A.B.C} \right)$$

- Cas de deux variables

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	1	0
B	0	1

$$X = \overline{A}.\overline{B} + A.B$$

	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	1	1
B	0	1

$$X = A + \overline{B}$$

- Cas de trois variables

	$\overline{A}.\overline{B}$	$\overline{A}.B$	$A.B$	$A.\overline{B}$
$\overline{C}$	0	1	1	0
C	0	0	0	0

$$X = B.\overline{C}$$

	$\overline{A}.\overline{B}$	$\overline{A}.B$	$A.B$	$A.\overline{B}$
$\overline{C}$	0	0	0	0
C	1	1	1	1

$$X = C$$

	$\overline{A}.\overline{B}$	$\overline{A}.B$	$A.B$	$A.\overline{B}$
$\overline{C}$	1	0	0	1
C	0	0	0	0

$$X = \overline{B}.\overline{C}$$

	$\overline{A}.\overline{B}$	$\overline{A}.B$	$A.B$	$A.\overline{B}$
$\overline{C}$	1	1	0	0
C	1	1	0	1

$$X = \overline{A} + \overline{B}.C$$

- Cas de quatre variables

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}$
$\overline{C}\overline{D}$	0	0	0	1
$\overline{C}D$	0	1	1	0
$C\overline{D}$	0	1	1	0
CD	0	0	1	0

$$X = B.D + A.B.C + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}$
$\overline{C}\overline{D}$	1	0	0	1
$\overline{C}D$	0	0	0	0
$C\overline{D}$	0	0	0	0
CD	1	0	0	1

$$X = \overline{B}\overline{D}$$

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}$
$\overline{C}\overline{D}$	1	1	1	1
$\overline{C}D$	0	0	0	0
$C\overline{D}$	0	0	0	0
CD	1	1	1	1

$$X = \overline{D}$$

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}$
$\overline{C}\overline{D}$	1	1	0	0
$\overline{C}D$	1	1	0	0
$C\overline{D}$	1	1	0	0
CD	1	1	0	0

$$X = \overline{A}$$

Quelques particularités

La simplification peut ne pas être unique

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	1	1	1	0
C	1	0	1	1

$$X = \overline{A}\overline{B} + B\overline{C} + A.C$$

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	1	1	1	0
C	1	0	1	1

$$X = \overline{A}\overline{C} + A.B + \overline{B}.C$$

Présence d'états indifférents

	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$A\overline{B}$
$\overline{C}$	1	0	x	x
C	1	0	0	1