

Exercice 1 :

Considérons les informations élémentaires suivantes :

A : Il a de la fièvre.

B : Il a mal à la tête.

C : Il a une infection.

D : Il a pris son médicament.

E : Il est en convalescence.

Formules à traduire :

(1) $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)$

(2) $C \Rightarrow (B \vee E)$

(3) $(D \wedge E) \Rightarrow A$

Exercice 2:

Donner la table de vérité de la formule suivante et déduire son modèle :

$$\psi = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

Exercice 3 :

En utilisant la méthode des tables de vérité, déterminer si chacune des propositions suivantes est une tautologie, satisfaisable ou insatisfaisable.

- $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
- $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
- $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
- $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Exercice 4 :

Soit la formule F définie comme :

$$F = ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg q \vee r)$$

Questions :

1. Donner la table de vérité de la formule F .
2. Dire si la formule est valide, satisfaisable ou insatisfaisable.
3. La formule F a-t-elle un modèle ? Si oui, lequel ?
4. Donner la forme normale conjonctive (FNC) et la forme normale disjonctive (FND) de la formule F

Exercice 5:

On définit le connecteur de Peirce (ou NOR), noté $\downarrow$, par :

$$p \downarrow q = \neg(p \vee q)$$

1. Vérifier que le connecteur $\downarrow$ est fonctionnellement complet en construisant la table de vérité de :
 - a) $p \downarrow q$
 - b) $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
2. On souhaite exprimer les connecteurs classiques ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$) uniquement en utilisant $\downarrow$. Pour chaque cas, proposer une formule équivalente et vérifier par table de vérité :
 - a) Négation : $\neg p$
 - b) Conjonction : $p \wedge q$
 - c) Disjonction : $p \vee q$
 - d) Implication : $p \Rightarrow q$
3. Proposer une formule utilisant uniquement $\downarrow$ qui est toujours vraie (tautologie).

Exercice 6:

Déterminer si le raisonnement suivant est correct de point de vue logique :

« le prix de l'huile d'olive diminue si la récolte est bonne. Les hommes sont contents quand le prix de l'huile d'olive diminue. La récolte est bonne. Donc les hommes ne sont pas contents. »

Exercice 7:

Examiner si les raisonnements suivants sont corrects de point de vue logique :

Raisonnement 1

Si le dernier chiffre d'un nombre est 0, il est divisible par 5. Le dernier chiffre d'un nombre n'est pas 0.
Donc il n'est pas divisible par 5.

Raisonnement 2

Si la température de l'air et la pression atmosphérique sont restées constantes, il n'a pas pu pleuvoir.
La température de l'air est restée constante. Donc, s'il a plu, alors la pression atmosphérique n'est pas restée constante.

Raisonnement 3

Si le prévenu a commis le vol, alors ce vol a été minutieusement préparé, ou alors le prévenu avait un complice.
Si le vol a été minutieusement préparé, alors, si le prévenu avait un complice, un butin plus important aurait été emporté.
Or, le butin n'a pas été important. Donc, le prévenu n'a pas commis le vol.

Raisonnement 4

Si nous construisons des abris, d'autres pays peuvent se sentir menacés et les habitants de notre pays peuvent avoir une fausse impression de sécurité.
Si d'autres pays se sentent menacés, ils peuvent déclencher une guerre préventive.
Si les habitants de notre pays ont une fausse impression de sécurité, ils risquent de faire moins d'efforts pour préserver la paix.
Si nous ne construisons pas d'abris, nous courrons le risque d'avoir de grosses pertes en cas de guerre.
Donc, soit d'autres pays peuvent déclencher une guerre préventive et les habitants de notre pays risquent de faire moins d'efforts pour préserver la paix, soit nous courrons le risque d'avoir de grosses pertes en cas de guerre.

Exercice 8:

L'inspecteur Lafrite est chargé de l'enquête concernant un vol de tableaux dans une galerie d'art. Il a demandé à Relbou et Gremai, deux de ses adjoints de l'aider dans l'affaire.

L'enquête a abouti à l'arrestation de quatre personnes : Jules Rasteau, Désiré Lagrange, Michel Boileau et Félicie Ossy. Les interrogatoires sont conduits par les deux adjoints qui viennent faire leur rapport :

F1) Relbou: Jules Rasteau est innocent mais je suis persuadé qu'au moins l'un des autres est coupable.

F2) Gremai: Si Désiré Lagrange est coupable, alors il n'a qu'un complice, qui est d'ailleurs parmi les autres.

F3) Relbou : Et si Michel Boileau est coupable, je pense qu'il a deux complices parmi les autres.

F4) Lafrite : Si je considère que ce que vous me dites est vrai, je peux affirmer la culpabilité de l'une des quatre personnes

1. Représenter en calcul propositionnel les quatre affirmations F1, F2, F3 et F4.

2. L'ensemble des faits $F = \{F1, F2, F3, F4\}$ est-il cohérent? Pouvez-vous aider les inspecteurs à trouver la personne coupable ?



Exercice 9:

Monter les équivalences suivantes:

Important

a) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

b) $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

c) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$

d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

e) $p \wedge q \wedge (\neg p \vee \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg q \wedge (p \vee q)$

f) $p \vee (p \Rightarrow (p \wedge q)) \equiv \neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q)$

Exercice 10:

Formes normales conjonctives (CNF)

Mettre les formules suivantes sous **forme normale conjonctive** :

1. $p \vee (\neg q \wedge r)$

2. $(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee q)$

3. $(p \Rightarrow \neg q) \vee (r \wedge q)$

Formes normales disjonctives (DNF)

Mettre les formules suivantes sous **forme normale disjonctive** :

1. $p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow s)$

2. $\neg(p \wedge q) \wedge (r \Rightarrow s)$

3. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

Exercice 11 :

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des valuations (interpretations). Démontrer les propriétés suivantes:

1. $\models (P \Leftrightarrow Q) \text{ ssi } P \equiv Q$
2. $\models (P \wedge Q) \text{ ssi } \models P \text{ et } \models Q$