

Recueil d'exercices d'analyse corrigés
Premières années des classes préparatoires aux
études d'ingénieur

Nadia Ben Hamadi

17 février 2016

Préface

Ce recueil d'exercices avec rappels de cours, est consacré à des parties fondamentales d'analyse mathématique. Il comporte huit chapitres : nombres réels, suites numériques, limites et continuité des fonctions à variable réelle, dérivabilité, développements limités, intégrales et primitives d'une fonction continue, équations différentielles et fonctions à deux variables. Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera : un résumé de cours concis et des exercices intégralement corrigés. Ces nombreux exercices permettront au lecteur de bien assimiler le sujet. Les corrigés sont détaillés, expliqués, justifiés et un soin tout particulier a été apporté à leur rédaction afin de les rendre clairs et complets. Cet ouvrage s'adresse aux étudiants des niveaux de première année, qu'ils soient à l'université ou en classes préparatoires scientifiques.

Table des matières

Préface	1
1 Nombres réels	3
2 Suites numériques	14
3 Limite et continuité	30
4 Dérivabilité	38
5 Développements limités	48
6 Intégrales et primitives d'une fonction continue	58
7 Equations différentielles	83
8 Fonctions à deux variables	95

Chapitre 1

Nombres réels

Résumé

- **Corps des nombres réels.**

- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif totalement ordonné pour la relation d'ordre usuelle.
- $\mathbb{R}$ est Archimédien c'est à dire

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^*; na > b.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif noté $E(x)$ (ou $[x]$) et appelé partie entière de x vérifiant

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

- **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.**

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c'est à dire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x < r < y.$$

- **Majorant, minorant.**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est majorée par $M \in \mathbb{R}$ (ou que M est un majorant de A) si

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

- On dit que A est minorée par $m \in \mathbb{R}$ (ou que m est un minorant de A) si

$$\forall x \in A, x \geq m.$$

• **Maximum, minimum.**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

— On dit qu'un réel a est le plus grand élément de A si

$$a \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \leq a.$$

Le plus grand élément de A , s'il existe est unique. On le note alors $\max A$.

— On dit qu'un réel b est le plus petit élément de A si

$$b \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \geq b.$$

Le plus petit élément de A , s'il existe est unique. On le note alors $\min A$.

• **Borne supérieure, borne inférieure.**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et a un réel.

— On dit que a est la borne supérieure de A si a est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. On note $a = \sup A$.

— On dit que b est la borne inférieure de A si b est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. On note $b = \inf A$.

Axiome de la borne supérieure : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (respectivement minorée) admet une borne supérieure (respectivement une borne inférieure).

Caractérisation de la borne supérieure : Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} a = \sup A &\iff \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \leq a \\ \forall b < a, \exists x \in A, b < x \leq a, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon < x \leq a. \end{cases} \end{aligned}$$

Caractérisation de la borne inférieure : Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} b = \inf A &\iff \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \geq b \\ \forall y > b, \exists x \in A, b \leq x < y, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \geq b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, b \leq x < b + \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 1.1.

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Preuve :

On procède par l'absurde. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et supposons que $z = x + y$ est rationnel alors $y = z - x$ est rationnel par différence de deux nombres rationnels (car $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe). Ce qui contredit le fait que y est irrationnel.

Exercice 1.2.

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Montrer que les nombres réels $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - \sqrt{2}$ sont irrationnels.
3. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
4. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

Preuve :

1. Raisonnons pas l'absurde et supposons qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, alors

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2.$$

Et par suite p^2 est pair donc p est pair c'est à dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. D'où

$$2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2,$$

ainsi q est pair et donc p et q ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit le fait que $p \wedge q = 1$. D'où, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Si α est rationnel alors $\sqrt{2} = \frac{\alpha-6}{4}$ est rationnel, ce qui est absurde. De même pour β .
3. On a $\sqrt{\alpha\beta} = 2 \in \mathbb{Q}$.
4. On a $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 16$ et $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0$ donc $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 1.3.

Soit $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (1.1)$$

1. Déterminer toutes les fonctions constantes f vérifiant la relation (1.1).
2. (a) Calculer $f(0)$.
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(-x) = -f(x)$.
(c) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
(d) On pose $a = f(1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$.

Preuve :

1. La relation (1.1) avec f une fonction constante égale à C donne $C = C + C$. D'où $C = 0$.
2. (a) Dans la relation (1.1), on prend $x = y = 0$, on en déduit que $f(0) = 0$.
(b) Pour $y = -x$, la relation (1.1) implique que $0 = f(-x) + f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.
(c) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(nx) = nf(x)$.
Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on pose $n = -p$, $p \in \mathbb{N}$ et donc en utilisant 2(b), on a

$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x).$$

Donc le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

- (d) Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors, on peut écrire $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$f(x) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right)$$

or

$$a = f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$. Et par suite, on a

$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 1.4.

Si n est un entier ≥ 2 , montrer que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.

Preuve :

Il suffit de montrer que H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair, cela assurera que $H_n \notin \mathbb{Z}$.

Démontrons la propriété par récurrence forte.

Pour $n = 2$, c'est immédiat.

Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n - 1 \geq 2$. On distingue deux cas.

— Cas n impair.

On peut écrire $n = 2k + 1$ et puisque par hypothèse de récurrence H_{n-1} s'écrit $(2p + 1)/2q$, on obtient $H_n = H_{n-1} + 1/n$ égale au rapport d'un entier impair par un entier pair .

— Cas n est pair.

On peut écrire $n = 2k$ avec $k \geq 2$ puis $H_n = \frac{1}{2}H_k + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1}$.

Par hypothèse de récurrence, H_k est le rapport d'un entier impair par un entier pair, donc $\frac{1}{2}H_k$ aussi.

De plus, comme entrevu dans l'étude du cas précédent, l'ajout de l'inverse d'un entier impair conserve la propriété.

Ainsi H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair.

Exercice 1.5.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Preuve :

On a $E(nx) \leq nx$ puis $\frac{E(nx)}{n} \leq x$. Comme $x \mapsto E(x)$ est croissante alors

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x).$$

D'autre part, $nE(x) \leq nx$ et par suite $nE(x) \leq E(nx)$, car $nE(x) \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $E(x) \leq \frac{E(nx)}{n}$ puis

$$E(x) \leq E\left(\frac{E(nx)}{n}\right).$$

D'où $E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$.

Exercice 1.6.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

Preuve : Effectuons la division euclidienne de $m = E(nx)$ par n , on obtient $m = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n - 1$.

On a $nq + r \leq nx < nq + r + 1$ donc

$$q + \frac{k+r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

On en déduit que si $k+r < n$ alors $E\left(x + \frac{k}{n}\right) = q$ et si $k+r \geq n$ alors $E\left(x + \frac{k}{n}\right) = q+1$.

Par suite

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-r-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=n-r}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) \\ &= nq + r \\ &= m \\ &= E(nx). \end{aligned}$$

Exercice 1.7.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées .
 Montrer que $\sup A$, $\sup B$ et $\sup A \cup B$ existent et

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Preuve :

D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup A$ et $\sup B$ existent. Puisque A et B sont non vides alors $A \cup B$ est non vide. Soit $x \in A \cup B$, on a

$$x \leq \max(\sup A, \sup B).$$

Donc $A \cup B$ est majorée et par suite $\sup(A \cup B)$ existe et on a

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B).$$

De plus, A et $B \subset A \cup B$, on a $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$. donc

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B).$$

D'où l'égalité.

Exercice 1.8.

Déterminer la borne inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) / x_1, \dots, x_n > 0 \right\}.$$

Preuve : Après développement et en utilisant la relation $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geq 2$, on obtient

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i}{x_j} \geq n^2.$$

Donc n^2 est un minorant de A . De plus, pour $x_1 = \dots = x_n = 1$, on obtient $(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = n^2$. Donc $n^2 \in A$ et on a

$$\inf A = \inf \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) / x_1, \dots, x_n > 0 \right\} = n^2.$$

Exercice 1.9.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1 - x)$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} f_n(x).$$

Preuve :

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_n(x) = nx^{n-1}(1 - x) - x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$.

On vérifie facilement que f_n admet un maximum en $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0, 1]$ et

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Exercice 1.10.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mettre la somme $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$ sous la forme $re^{i\theta}$ où r et θ sont des réels à préciser.

(b) En déduire une factorisation de la somme $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'équation

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = 0. \quad (1.2)$$

(d) Quelles sont les solutions de (1.2) dans l'intervalle $[0, \pi]$?

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel tel que $\sin(a) \neq 0$. On pose

$$Q_n = \cos\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \dots \cos\left(\frac{a}{2^n}\right).$$

(a) Écrire le produit Q_n avec le symbole $\prod$.

(b) Soit $u_n = Q_n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)$, montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

(c) Simplifier le produit Q_n .

Preuve :

1. (a) On reconnaît la somme d'une suite géométrique de raison e^{ix} car $e^{ikx} = (e^{ix})^k$.
Puisque x est différent de 0 modulo 2π , $e^{ix} \neq 1$ et on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n e^{ikx} &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{2ie^{i(n+1)x/2} 2i \sin(\frac{(n+1)x}{2})}{2ie^{ix/2} \sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} e^{in\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

On a, donc

$$r = \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \equiv \frac{nx}{2} (2\pi).$$

- (b) On a $\cos(kx) = \Re(e^{ikx})$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \Re \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) \\ &= \Re(re^{i\theta}) \\ &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\cos(\frac{nx}{2}) \sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

- (c) On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \cos(kx) = 0 &\iff \frac{\cos(nx/2) \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} = 0 \\ &\iff \cos(nx/2) \sin((n+1)x/2) = 0, \quad x \neq 0[2\pi] \\ &\iff \cos(nx/2) = 0 \text{ ou } \sin((n+1)x/2) = 0, \quad x \neq 0[2\pi] \\ &\iff \frac{nx}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{(n+1)x}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } x \neq 0[2\pi] \\ &\iff x = \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } x \neq 0[2\pi].\end{aligned}$$

- (d) Déterminons maintenant les solutions de (1.2) dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Pour $x = \frac{(2k+1)\pi}{n}$ et $x \neq 0[2\pi]$:

$$0 \leq x \leq \pi \iff 0 < 2k+1 \leq n \iff 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}.$$

Pour $x = \frac{(2k)\pi}{n+1}$ et $x \neq 0(2\pi)$:

$$\begin{aligned} 0 < x \leq \pi &\iff 0 < 2k \leq n+1 \\ &\iff 0 < k \leq \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions de (1.2) dans l'intervalle $[0, \pi]$ sont :

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad 0 < k \leq \frac{n+1}{2}.$$

2. (a) Il est clair que $Q_n = \prod_{k=1}^n \cos(\frac{a}{2^k})$.

(b) On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Q_{n+1} \times \sin(\frac{a}{2^{n+1}}) \\ &= Q_n \times \cos(\frac{a}{2^{n+1}}) \times \sin(\frac{a}{2^{n+1}}) \end{aligned}$$

Comme

$$\cos(x) \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x),$$

alors

$$u_{n+1} = Q_n \frac{1}{2} \sin(\frac{a}{2^n}) = \frac{1}{2} u_n.$$

Donc, $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(c) On a $u_n = u_1(\frac{1}{2})^{n-1}$ ou encore

$$\begin{aligned} u_n &= \cos(\frac{a}{2}) \sin(\frac{a}{2}) \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\sin(a)}{2^n}. \end{aligned}$$

Comme $\sin(a) \neq 0$ alors $a \neq k\mathbb{Z}$ et donc $\frac{a}{2^n} \neq k'\pi$ et par suite $\sin(\frac{a}{2^n}) \neq 0$, d'où

$$Q_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin(\frac{a}{2^n})}.$$

Exercice 1.11.

1. Déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble

$$A_n = \left\{ 1 - \frac{2(-1)^n}{n + (-1)^n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \right\}.$$

2. Calculer les sommes suivantes :

(a) $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right); n \in \mathbb{N}^*.$

(b) $T_n = \sum_{k=1}^n k k!; n \in \mathbb{N}^*.$

(c) $R_n = \sum_{k=1}^n C_n^k \cos(k \frac{\pi}{2}); n \in \mathbb{N}.$

3. Calculer la limite de la suite définie par son terme général $U_n = \frac{E[(n-\frac{1}{2})^2]}{E[(n+\frac{1}{2})^2]}$

Preuve :

1. Pour $n = 2k, k \geq 1$, on a $\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{2k+1} < 1$.

Pour $n = 2k + 1, k \geq 1$, on a $1 < 1 + \frac{1}{k} \leq 2$.

Donc $\frac{1}{3}$ est un minorant de A_n , de plus $\frac{1}{3} \in A_n$ donc $\min(A_n) = \frac{1}{3}$.

De même, 2 est un majorant de A_n et $2 \in A_n$, donc $\max(A_n) = 2$.

2. (a) $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$

(b) $T_n = \sum_{k=1}^n k k! = \sum_{k=1}^n (k+1 - 1)k! = \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1.$

(c) On a

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{k=1}^n C_n^k \cos(k \frac{\pi}{2}) &= \Re \left(\sum_{k=1}^n C_n^k (e^{i \frac{\pi}{2}})^k \right) \\ &= \Re \left((1 + e^{i \frac{\pi}{2}})^n \right) \\ &= \Re \left((e^{i \frac{n\pi}{4}}) (e^{i \frac{\pi}{4}} - e^{-i \frac{\pi}{4}})^n \right) \\ &= 2^n \cos(n \frac{\pi}{4}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \\ &= 2^{n/2} \cos(\frac{n\pi}{4}). \end{aligned}$$

$$3. \ E \left(\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = E \left(n^2 - n + \frac{1}{4} \right) = n^2 - n \text{ et } E \left(\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) = E \left(n^2 + n + \frac{1}{4} \right) = n^2 + n.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E \left(\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right)}{E \left(\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n}{n^2 + n} = 1.$$

Chapitre 2

Suites numériques

Résumé

- **Définition et critères de convergence.**

Soit $(x_n)_n$ une suite réelle. On dit que $(x_n)_n$ converge vers un réel l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

- . Toute suite convergente est bornée.
- . Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.
- . Toute suite croissante majorée est convergente vers $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{u_n\}$.
- . Toute suite décroissante minorée est convergente vers $l = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{u_n\}$.

- **Suites adjacentes.**

Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles. On dit que les deux suites sont adjacentes si

$$\begin{cases} (x_n)_n \nearrow, (y_n)_n \searrow, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - y_n = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, les deux suites sont convergentes vers la même limite l et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq l \leq y_n.$$

- **Théorème de comparaison.**

Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n| \leq y_n \quad ; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0, \end{cases}$$

alors $(x_n)_n$ converge vers 0.

• **Théorème de l'encadrement.**

Soient $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ des suites réelles telles que

$$\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \leq y_n \leq z_n; \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

alors $(y_n)_n$ converge vers l .

• **Suites récurrentes.**

Si $(x_n)_n$ est une suite récurrente (i.e. $x_{n+1} = f(x_n)$) est convergente vers l et si f est continue en l alors $l = f(l)$.

Exercice 2.1.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse :

1. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites croissantes alors la suite $(u_n + v_n)_n$ est croissante.
2. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites croissantes alors la suite $(u_n \cdot v_n)_n$ est croissante.
3. Toute suite bornée est croissante.
4. Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
5. Toute suite croissante et divergente tend vers $+\infty$.
6. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$. Si $(v_n)_n$ est convergente alors il en est de même pour $(u_n)_n$.
7. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $(|u_n|)_n$ est convergente alors $(u_n)_n$ est convergente.
8. Toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tend vers $+\infty$.
9. Toute suite convergente est croissante et majorée.
10. Toute suite convergente est décroissante et minorée.
11. Si $|a| < 1$ alors la suite $(a^n)_n$ tend vers 0.
12. Si $|a| > 1$ alors la suite $(a^n)_n$ est divergente.
13. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 1$.

Preuve :

1. Vrai. En effet $(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) \geq 0$.
2. Faux. On pourra considérer les suites $u_n = n^2$ et $v_n = -\frac{1}{n}$.
3. Faux. En effet la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas croissante car l'expression $u_{n+1} - u_n = 2(-1)^{n+1}$ change de signe.

4. Vrai. En effet, puisque $(u_n)_n$ n'est pas majorée alors pour $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq A$ et donc

$$\forall n \geq n_0 : u_n \geq u_{n_0} \geq A.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

5. Vrai. En effet $(u_n)_n$ est divergente donc $(u_n)_n$ est non majorée. De plus, $(u_n)_n$ est croissante, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. Faux. Il suffit de considérer les suites $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2$.

7. Faux. Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$.

8. Vrai. En effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$.

9. Faux. Contre-exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

10. Faux. Contre-exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

11. Vrai. En effet

- Si $a = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $0 < a < 1$ alors $u_{n+1} = au_n < u_n$. Donc $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0. Ceci implique que $(u_n)_n$ converge vers sa borne inférieure.
- Si $-1 < a < 0$ alors $|a|^n \rightarrow +\infty$. Et par suite $(a^n)_n$ converge vers 0.

12. Vrai. Si $|a| > 1$ alors $|a|^n \rightarrow +\infty$, en effet, soit $B > 0$, il existe $n_0 = E(\frac{\ln B}{\ln a}) + 1$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|a|^n > B$.
Si $a = -1$ alors la suite $((-1)^n)_n$ est divergente.

13. Faux. Contre-exemple : la suite $(1 + \frac{1}{n})_n$ converge vers 1 mais

$$(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \rightarrow e.$$

Exercice 2.2.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dans chacun des cas suivants et déterminer sa limite quand elle existe :

- a) $u_n = \frac{\cos n}{n}$; b) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}}$; c) $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}}$;
d) $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n kE(kx)$, $x \in \mathbb{R}$; e) $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})$.

Preuve :

- a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |\frac{\cos n}{n}| \leq \frac{1}{n}$ et $(\frac{1}{n})_n$ converge vers 0. Donc d'après le théorème de l'encadrement la suite $(\frac{\cos n}{n})_n$ converge vers 0.

b) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}}.$$

D'où

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2}} = 1,$$

on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} = 1.$$

c) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n^2\}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{3}}.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} \geq n^2 \frac{1}{n\sqrt{3}} = \frac{n}{\sqrt{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2k}} = +\infty.$$

d) Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $kx - 1 < E(kx) \leq kx$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n kE(kx) \leq \frac{x}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Or, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

d'où

$$u_n \leq \frac{n(n+1)(2n+1)x}{6n^3}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n kE(kx) > \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 x - \sum_{k=1}^n k \right)$$

et $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, d'où

$$u_n > \frac{n(n+1)(2n+1)x}{6n^3} - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)}{2}.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)x}{6n^3} = \frac{x}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^3} = 0.$$

On déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{x}{3}.$$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n}\right) + \dots \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$, on en déduit que d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 2.3.

1. Montrer que si les sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes vers la même limite alors la suite $(u_n)_n$ converge aussi vers cette limite.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$; $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Preuve :

1. Supposons que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite l .
Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \forall p \geq n_0 \Rightarrow |u_{2p} - l| \leq \varepsilon \\ \forall p \geq n_1 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Notons $N = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. Alors pour tout $n \geq N$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$.

- Si $n = 2p$ alors $n \geq N \Rightarrow p \geq n_0$ et donc $|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \varepsilon$.

- Si $n = 2p + 1$ alors $n \geq N \Rightarrow p \geq n_1$ et donc $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \varepsilon$.

D'où $(u_n)_n$ converge vers l .

2. Il suffit de montrer que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. On a $(u_{6n})_n$ est une suite extraite de $(u_{2n})_n$ et de $(u_{3n})_n$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n}.$$

De même, $(u_{6n+3})_n$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_n$ et de $(u_{3n})_n$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$. D'après 1, la suite $(u_n)_n$ est alors convergente.

Exercice 2.4.

On associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

1. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

(On pourra écrire $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^p u_k + \sum_{k=p+1}^{n-1} u_k$ où p est convenablement choisi pour majorer les deux termes).

2. Montrer que la suite $(y_n)_n$ associée à $(z_n)_n$ définie par $z_n = u_n - l$ est donnée par $y_n = v_n - l$; $l \in \mathbb{R}$. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l. \quad (2.1)$$

3. Étudier la réciproque de (2.1) (On considèrera les suites de terme général $u_n = \sin n$ et $u_n = (-1)^n$).

Preuve :

1. Soit $\varepsilon > 0$, comme $(u_n)_n$ converge vers 0, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On écrit alors

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n-1} u_k.$$

Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n-1} u_k \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n-1} |u_k| \\ &\leq \frac{n - n_0 - 1}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow n \geq \frac{2}{\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right|.$$

Posons $a = \left| \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right|$ et soit $N = \max(n_0, E(\frac{2a}{\varepsilon}) + 1)$ alors on a

$$\forall n \geq N, |v_n| \leq \varepsilon.$$

Et par suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

2. On a $z_n = u_n - l$ donc

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = v_n - l.$$

En appliquant ce qui précède à $z_n = u_n - l$, on obtient le résultat.

3. Pour $u_n = (-1)^n$, on a

$$v_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc, $(v_n)_n$ est convergente vers 0 alors que $(u_n)_n$ est divergente.

Pour $u_n = \sin n$, $(u_n)_n$ est divergente. D'autre part, il suffit d'écrire $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{I}m(e^{ik})$,

on obtient

$$v_n = \frac{\sin(\frac{n-1}{2}) \sin(\frac{n}{2})}{n \sin(\frac{1}{2})}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme la suite $(\sin(\frac{n-1}{2}) \sin(\frac{n}{2}))_n$ est bornée et la suite $(\frac{1}{n})_n$ converge vers 0 alors $(v_n)_n$ converge comme étant le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0.

En conclusion, la réciproque n'est pas vraie.

Exercice 2.5.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}, \\ v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ admettent une limite commune. (On ne cherchera pas à la calculer).

Preuve : Puisque $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$, on montre par récurrence que les réels u_n et v_n sont strictement positifs. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n - u_n = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2 > 0,$$

On en déduit que $v_n > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0,$$

donc $(u_n)_n$ est croissante. De même, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc $(v_n)_n$ est décroissante et

$$v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On déduit par récurrence sur n que

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque la suite $((\frac{1}{2})^n)_n$ converge vers 0 et $v_n - u_n > 0$ d'où $(v_n - u_n)_n$ converge vers 0. Donc, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes et par suite, elles sont convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 2.6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $u_{2n} - u_n > \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

La suite (u_n) est-elle de Cauchy ? est-elle convergente ?

Preuve : On a $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$. Donc, $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy et par suite elle n'est pas convergente.

Exercice 2.7.

1. On pose $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

2. On pose $v_n = \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Preuve :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n},$$

donc

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n} < u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Ainsi, $(u_n)_n$ converge vers 0.

2. Avec les mêmes arguments, on obtient

$$\frac{E(\sqrt{n})^2}{(E(\sqrt{n}) + 1)^2} < v_n \leq 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Exercice 2.8.

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}). \end{cases}$$

On se propose de montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a^2)^2}{4u_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers a .
4. Donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$, $k \in \mathbb{R}_+$, montrer que pour $n \geq 1$,

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : en prenant $u_0 = 3$, calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule.

Preuve :

1. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4} \left(\frac{u_n^2 + a}{u_n} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4u_n^2} (u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\ &= \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}. \end{aligned}$$

2. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre facilement que $u_n \geq 0$. En utilisant 1, on a $u_{n+1}^2 - a \geq 0$ et comme u_{n+1} est positif, alors $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$. Soit $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{u_n^2} \right),$$

comme $\frac{a}{u_n^2} \leq 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et puisque $(u_n)_n$ est une suite à termes positifs alors elle est décroissante.

3. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, donc elle converge vers une limite $l > 0$. Par passage à la limite dans la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right),$$

on obtient $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$.

La seule solution positive est $l = \sqrt{a}$. Donc $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{a}$.

4. La relation

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$

s'écrit aussi

$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$

En utilisant le fait que $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(u_{n+1} + \sqrt{a})} \left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leq (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(2\sqrt{a})} \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \\ &\leq (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

5. On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leq 1$.
Supposons que la proposition est vraie au rang n . On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2 \left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &\leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

6. Soit $u_0 = 3$ alors $u_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = 3.166\dots$

Comme $3 \leq \sqrt{10} \leq u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leq 0.166\dots$. On choisit $k = 0.17$. Pour que l'erreur $(u_n - \sqrt{a})$ soit inférieure à 10^{-8} , il suffit de calculer le terme u_4 car l'erreur, d'après la question précédente, est inférieure à 1.5310^{-10} . On obtient $u_4 = 3.16227766\dots$

Exercice 2.9.

1. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_n = 1 + a \cos 1 + \dots + a^n \cos n; \quad a \in]0, 1[.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy.

2. Soit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$v_n = \frac{\delta_0}{1} + \frac{\delta_0 \delta_1}{2} + \dots + \frac{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_n}{2^n};$$

où $(\delta_n)_{n \geq 0}$ est une suite réelle telle que $\delta_n^2 = 1$.

(a) Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite convergente.

(b) Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Montrer $-2 \leq l \leq 2$.

Preuve :

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+p} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+p} a^k \cos k - \sum_{k=0}^n a^k \cos k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a^k \cos k \\ &= a^{n+1} (\cos(n+1) + a \cos(n+2) + \dots + a^{p-1} \cos(n+p)) \\ &\leq a^{n+1} (1 + a + \dots + a^{p-1}) \\ &\leq a^{n+1} \frac{1 - a^p}{1 - a} \\ &\leq \frac{a^{n+1}}{1 - a}. \end{aligned}$$

La suite $(\frac{a^{n+1}}{1-a})_n$ est une suite géométrique de raison $0 < a < 1$, donc elle converge vers 0. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \frac{a^{n+1}}{1-a} \right| \leq \varepsilon,$$

et par suite,

$$\forall n \geq N, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.

2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+p} - v_n = \frac{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_{n+1}}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\delta_0 \delta_1 \dots \delta_{n+p}}{2^{n+p}}.$$

D'où

$$\begin{aligned} |v_{n+p} - v_n| &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(|\delta_0 \delta_1 \dots \delta_{n+1}| + \dots + \frac{|\delta_0 \delta_1 \dots \delta_{n+p}|}{2^{p-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p \right) \\ &\leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Puisque $((\frac{1}{2})^n)_n$ est une suite géométrique convergente vers 0 donc $(v_n)_n$ est de Cauchy.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$-2 \leq v_n \leq 2.$$

Alors le résultat est immédiat par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2.10.

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$; 2. $u_n = \sin(\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}\pi)$;
3. $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{n}}$; 4. $u_n = \ln(n + \sqrt{n^2 + 1})$.

Preuve :

$$1. \quad u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

$$2. \quad \sin\left(\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}\pi\right) = \sin\left((n + \frac{1}{n+1})\pi\right), \text{ or on sait que } \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x.$$

Ainsi,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\pi}{n + 1}.$$

$$3. \quad u_n = \sqrt{1 + \sqrt{n}} = \sqrt{\sqrt{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})} = n^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \text{ et } \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{+\infty}{\sim} 1, \text{ d'où}$$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4}}.$$

4. On a

$$\begin{aligned}\ln(n + \sqrt{n^2 + 1}) &= \ln\left(n\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)\right) \\ &= \ln n + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln 2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,

$$\ln(n + \sqrt{n^2 + 1}) \underset{+\infty}{=} \ln n + \ln 2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \ln(2n) + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et par suite $\ln(n + \sqrt{n^2 + 1}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2n) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$. On en déduit que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

Exercice 2.11.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. En déduire la limite de la suite $(S_n)_n$.

3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente.

4. Donner un équivalent simple de $(S_n)_n$.

Preuve :

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}},$$

or

$$2\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1} + \sqrt{k} \leq 2\sqrt{k+1},$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. D'après 1, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k},$$

Ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq \sum_{k=1}^n (2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k})$. Ainsi

$$S_n \geq 2 + 2\sqrt{n+1}.$$

Ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

3. Soit $n \geq 1$, d'après la question 1, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0.$$

De plus, d'après la question 2, on a

$$u_n = S_n - 2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geq -2.$$

Donc $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par -2 donc elle est convergente vers un réel l .

4. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - 2\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{\sqrt{n}} = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{2\sqrt{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n - 2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \right) = 0.$$

On en déduit que

$$S_n \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}.$$

Chapitre 3

Limite et continuité

Résumé

- **Définition de la limite en un point.**

Soit I un intervalle, a un point de I et f une fonction définie sur I , sauf peut-être au point a . On dit que f admet une limite l en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

- **Continuité**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I . Tout produit, somme, quotient (lorsqu'il est défini) et composée de fonctions continues est une fonction continue.
- Caractérisation séquentielle de la continuité : f est une fonction continue en a si et seulement, si pour toute suite $(a_n)_n$ convergente vers a , la suite $(f(a_n))_n$ a pour limite $f(a)$.

- **Fonction continue sur un segment.**

Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$, alors :

- $f(I)$ est un segment.
- f est bornée sur I et atteint ses bornes, c'est à dire il existe deux réels x_1 et x_2 de I tels que

$$f(x_1) = \inf_I f, \quad f(x_2) = \sup_I f.$$

• **Théorème de la limite monotone.**

Toute fonction croissante possède en un point une limite à gauche. Celle-ci est finie si et seulement si la fonction est majorée.

• **Fonctions réciproques.**

Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I . Alors :

- $J = f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert, ...).
- f réalise une bijection de I vers J et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et de même sens de monotonie que f .
- Si $I = [a, b]$ et f est croissante (resp. décroissante), alors $J = [f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).
- Si $I =]a, b]$ et f est croissante alors $J =] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$.
- Le graphe de f^{-1} s'obtient par symétrie du graphe de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Exercice 3.1.

En utilisant la définition de la limite, montrer que

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$,
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$,
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$,
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, ($n \in \mathbb{N}^*$),
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$,
7. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Preuve :

1. Soit $A > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$|x - 1| < \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} > A.$$

Or pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $x - 1 > 0$ et par suite

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \frac{1}{A} \Leftrightarrow x - 1 < \frac{1}{A^2}.$$

Posons $\alpha = \frac{1}{A^2}$, on a alors

$$\forall x \in]1, +\infty[, |x - 1| < \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} > A.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à déterminer $B > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x > B \Rightarrow \left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Donc, il suffit de choisir $B = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ pour obtenir le résultat.

3. Soit $A > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\frac{1}{x} > A$, or pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x} > A \Leftrightarrow x < \frac{1}{A}.$$

Il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{A}$.

4. Soit $A > 0$. On cherche $B > 0$ tel que si $x > B$ alors $x^n > A$.

- Si $n = 1$ alors $B = A$.
- Si $n \geq 2$ alors

$$x^n - x = (x^2 - x)(x^{n-2} + \dots + 1) = x(x-1)(x^{n-2} + \dots + 1).$$

Donc $x > 1 \Rightarrow x^n > x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$x > \max(1, A) \Rightarrow x^n > A.$$

On choisit alors $B = \max(1, A)$.

5. Soit $A > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|x| < \alpha \Rightarrow \frac{1}{x^2} > A$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{1}{x^2} > A \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$. Donc, on prend $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

6. Soit $A > 0$. Existe-t-il $\delta > 0$ tel que pour $0 < x \leq \delta \Rightarrow \ln x \leq -A$.

Il suffit de prendre $0 < \delta \leq e^{-A}$.

7. Soit $\alpha > 0$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $x^\alpha > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\forall x \in]0, +\infty[, x^\alpha \leq \varepsilon \implies x \leq \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Donc pour $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ et pour tout $0 < x \leq \delta$, on a $x^\alpha \leq \varepsilon$.

Exercice 3.2.

Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \arctan x}{x},$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)(1-\cos x)}{x(1-\sqrt{1+x})},$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^x) \sin x}{x^2 + x^3},$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}{E\left(\frac{1}{x}\right) + x},$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}.$

Preuve :

1. La fonction $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$, car c'est le produit d'une fonction qui tend vers 0 et d'une autre bornée.

2. Pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \frac{x + \arctan x}{x} \right| = \left| 1 + \frac{\arctan x}{x} \right| \leq 1 + \left| \frac{\arctan x}{x} \right| \leq 1 + \frac{\pi}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

3. On a $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{2}$ alors

$$\frac{(1+x^2)(1-\cos x)}{x(1-\sqrt{1+x})} \underset{0}{\sim} -1 - x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1.$$

4. On a

$$1 - e^x \underset{0}{\sim} -x \quad \text{et} \quad \sin x \underset{0}{\sim} x.$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{1+x} = -1.$$

5. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{E(\frac{1}{x}) - x}{E(\frac{1}{x}) + x} = 1 - \frac{2x}{E(\frac{1}{x}) + x}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(\frac{1}{x}) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} E(\frac{1}{x}) = -\infty$.

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E(\frac{1}{x}) - x}{E(\frac{1}{x}) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{2x}{E(\frac{1}{x}) + x} = 1.$$

6. On a $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\tan^2 x \underset{0}{\sim} x^2$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.3.

1. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Même question pour les fonctions $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 et $x \mapsto x \cos x$ en $+\infty$.

Preuve :

1. Considérons la suite $(2n\pi)_n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n\pi = +\infty$ et $\sin(2n\pi) = 0$.
D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n\pi + \frac{\pi}{2}) = +\infty$ mais $\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$.
Donc, la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Il suffit de considérer la suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_n$. En effet, cette suite tend vers 0 alors que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.
En considérant les suites $(2n\pi)_n$ et $(2n\pi + \frac{\pi}{2})_n$, on déduit que la fonction $x \mapsto x \cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3.4.

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x + \sqrt{x - E(x)}$.
2. $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$
3. $h : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$
4. $i : x \mapsto \begin{cases} x \ln \frac{x^2+1}{x}, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Preuve :

1. On a $0 \leq x - E(x) < 1$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. f est continue sur tous les intervalles de la forme $]n, n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$ (puisque les seuls points de discontinuité de la partie entière sont les entiers). Reste à étudier la continuité en $n \in \mathbb{Z}$: on a $f(n) = n$, mais $\lim_{x \rightarrow n^-} x - E(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n+1$. Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité de g en 0. On a

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$. D'où, g est continue sur tout $\mathbb{R}$.

3. h est continue sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ et par suite, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0).$$

Donc h est continue en 0 et par suite elle est continue sur $\mathbb{R}$.

4. On a $i(x) = x \ln(x^2 + 1) - x \ln x$ si $x > 0$. Chacun des deux termes tend vers 0 en 0^+ , donc la fonction i est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3.5.

On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n .
2. Calculer u_1 et u_2 puis vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on déduire concernant la suite $(u_n)_n$?
5. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente vers une limite qu'on notera l .
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l .

Preuve :

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur $]0, +\infty[$ comme étant la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$. De plus, elle est continue en 0 avec $f_n(0) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. Le théorème de la bijection nous permet d'affirmer l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. u_0 est la solution positive de l'équation $1 + 9x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = \frac{1}{3}$. Donc $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
L'équation $9x^2 + x - 4 = 0$ admet une seule solution positive donc $u_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18} \approx 0.61$.
De même, u_2 est la solution positive de l'équation $10x^2 = 4$, d'où $u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0.63$.
Pour vérifier que $u_n < \frac{2}{3}$, il suffit de constater que $f_n(\frac{2}{3}) = \frac{2^n}{3^n} + 8 > 0$, et d'appliquer la stricte croissance de la fonction f_n à l'inégalité $0 = f_n(u_n) < f_n(\frac{2}{3})$.
3. On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(1 - x)$. Cette expression étant positive si $x < 1$, on en déduit que $\forall x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. On a notamment, puisque $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0$. Comme par ailleurs $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. On déduit via la stricte croissance de f_{n+1} que $u_n < u_{n+1}$. Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.

5. La suite $(u_n)_n$ étant croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, elle converge.
6. Comme $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $0 < u_n^n < (\frac{2}{3})^n$, donc via le théorème de l'encadrement et le fait que $((\frac{2}{3})^n)_n$ est une suite géométrique de raison inférieure strictement à 1, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$. Or, on a par définition $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ (puisque $f_n(u_n) = 0$), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9u_n^2 - 4 = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = \frac{4}{9}$. Comme $u_n > 0$, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 3.6.

On considère la fonction f définie sur $]0, \frac{1}{e}[\cup] \frac{1}{e}, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x + 1}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ? On notera encore ce prolongement par f .
2. Etudier les variations de f .
3. Déterminer les points fixes de f .
4. On définit une suite récurrente $(x_n)_n$ par

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

5. (a) Etudier les variations de la fonction $g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Dédurre que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$.
- (c) Déterminer la limite de $(x_n)_n$.

Preuve :

1. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Donc f est prolongeable en 0. De plus, f est dérivable et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{1}{e}[$ et on a

$$f'(x) = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

D'après le théorème de prolongement, la fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. On remarque que f est décroissante sur $[0, \frac{1}{e}[$ et sur $]\frac{1}{e}, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Résolvons $f(x) = x$. Si l'on élimine la valeur 0 qui est un point fixe évident de f , on obtient $\ln x + 1 = 1$, donc $x = 1$. f admet donc deux points fixes 0 et 1.
4. (a) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$g'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

g admet un maximum en 1 qui vaut $g(1) = \frac{1}{4}$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \geq 0, 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{4}.$$

Or, on a $f'(x) = g(\ln x)$ et par suite $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

- (b) Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [1, +\infty[$. Appliquons un raisonnement par récurrence.

On sait que $x_0 = 2 \geq 1$, donc supposons que $x_n \geq 1$ et puisque $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$, donc $x_{n+1} = f(x_n) \geq f(1) = 1$. Ce qui achève la récurrence.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[1, x_n]$, on obtient

$$|f(x_n) - f(1)| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1| \Rightarrow |x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|.$$

Puis par récurrence sur n , on obtient

$$|x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}.$$

- (c) Puisque $(\frac{1}{4^n})_n$ est une suite géométrique de raison inférieure à 1 donc elle converge vers 0. En utilisant l'inégalité précédente et le théorème de l'encadrement, on obtient que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Exercice 3.7.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Preuve :

Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ convient.

Sinon, considérons la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ et puisque $f(0) > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$. Puisque g est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à 1, on peut affirmer par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 1$. D'où $f(\alpha) = \alpha$.

Chapitre 4

Dérivabilité

Résumé

- **Définition.**

Une fonction f est dérivable en un point a , si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow a$. Cette limite est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- **Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, x_0[\cup]x_0, b]$ et telle que $f'(x)$ possède une limite finie l lorsque $x \rightarrow x_0$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $f'(x_0) = l$.

- **Théorème de Rolle.**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

- **Théorème des accroissements finis.**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

- **Formule de Leibniz.**

Si f et g sont deux fonctions n -fois dérivables sur I , alors le produit fg est n -fois dérivable sur I et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

• **Dérivation d'une fonction réciproque.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie, dérivable et strictement monotone sur un intervalle I , réalisant donc une bijection de I sur son image $J = f(I)$ et g son application réciproque.

- Soit $a \in I$ tel que $f'(a) \neq 0$ et $b = f(a)$. Alors g est dérivable en b et
$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$
- En conséquence, si f' ne s'annule pas sur I , alors g est dérivable sur J et pour tout $y \in J$, on a

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Exercice 4.1.

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs fonctions dérivées :

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} ; \quad (b) g(x) = \begin{cases} \sin x \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} ;$$

$$(c) h(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, & \text{si } x \neq 1; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases} ; \quad (d) i(x) = \arcsin(\frac{1+x}{1-x});$$

$$(e) k(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

Preuve :

(a) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\frac{1}{x}) = 0$$

car $|\cos(\frac{1}{x})| \leq 1$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Par suite, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b) On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \sin(\frac{1}{x}),$$

or $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0 (il suffit de considérer la suite $u_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $\sin u_n = (-1)^n$), donc g n'est pas dérivable en 0. D'où, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$g'(x) = \cos x \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2} \sin x \cos(\frac{1}{x}), \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

(c) On a

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 1; \\ -x, & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc h n'est pas continue en 1, de plus h n'est pas dérivable en 0, par suite h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et on a

$$h'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[; \\ -1, & \text{si } x \in]0, 1[. \end{cases}$$

(d) La fonction i est définie sur $\mathbb{R}_-$ et dérivable sur $] -\infty, 0[$ et on a

$$i'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}, \quad x \in]-\infty, 0[.$$

(e) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $k'(x) = -\frac{\cos x}{2|\cos x|}$.

Exercice 4.2.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ telles que pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions continues en x_0 , dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in I \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l$.

3. Application : Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2}; \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Preuve :

1. Si $g(a) = g(b)$ alors il existe $d \in]a, b[$ tel que $g'(d) = 0$, ce qui est absurde vu les hypothèses et donc $g(b) - g(a) \neq 0$. Le résultat découle du théorème de Rolle appliqué à la fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow l$, quand $x \rightarrow x_0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad |x - x_0| \leq \alpha \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$. D'après 1., il existe $c_x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que

$$|c_x - x_0| < |x - x_0| \text{ et } \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Donc

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l \right| \leq \varepsilon.$$

D'où $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$:

$$|x - x_0| \leq \alpha \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l \right| \leq \varepsilon.$$

3. Application : $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = x^3$. On $g'(x) = 3x^2 \neq 0, \forall x \neq 0$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}.$$

On déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x - 1)^2} = \frac{\pi^2}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{-x} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 4.3.

Trouver toutes les fonctions $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $] -1, 1[$ et vérifiant

$$\forall (x, y) \in (]-1, 1[)^2, \quad f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right). \quad (4.1)$$

Preuve :

Pour x et $y \in]-1, 1[, \frac{x + y}{1 + xy} \in]-1, 1[$.

On dérive la relation (4.1) par rapport à x et par rapport à y , puis on combine, on trouve

$$\forall (x, y) \in]-1, 1[^2, \quad (1 - x^2)f'(x) = (1 - y^2)f'(y).$$

En particulier, on a $f'(x) = \frac{f'(0)}{1-x^2}$, $\forall x \in]-1, 1[$. Donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{f'(0)}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + A.$$

Ainsi, f est de la forme $x \mapsto a \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + A$.

En étudiant la réciproque, on obtient que l'ensemble des fonctions cherchées est

$$\{f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), a \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4.4.

Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall (x, y) \in ([0, 1])^2$:

$$x < y \implies \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin y - \arcsin x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}.$$

2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\forall y \in]0, 1[$:

$$x - \arcsin y \leq \frac{\sqrt{1-y^2} - \cos x}{y}.$$

Preuve :

1. Soient $x, y \in [0, 1[$, alors il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \arcsin t$ sur $[x, y]$.
2. En posant $z = \arcsin y$ alors $z \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\sin z \geq 0$. Ainsi, l'inégalité voulue se ramène à :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$
, $\forall z \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $(x-z) \sin z \leq \cos z - \cos x$.

Pour cela, soient $x, z \in [0, \frac{\pi}{2}[$ alors si $x = z$, l'inégalité est triviale. Sinon $x \neq z$ et on pourra supposer sans perte de généralité que $x > z$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $u \in]x, z[$ tel que

$$\cos z - \cos x = (z-x)(-\sin u).$$

Comme $0 < x < u < z < \frac{\pi}{2}$, on a $\sin x < \sin z$ et $z-x > 0$. D'où

$$\cos z - \cos x \geq (z-x)(-\sin z).$$

Exercice 4.5.

Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, b. $f(x) = \cos^3 x$, c. $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$, d. $f(x) = e^x \sin x$.

Preuve :

a. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}.$$

D'autre part, on montre par récurrence que les dérivées n^{ime} de $h(x) = \frac{1}{1-x}$ sont

$$h^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

De même, pour $g(x) = \frac{1}{1+x}$, on a

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

On déduit que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left(\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right).$$

b. On a $f(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x$. D'où

$$f^{(n)}(x) = \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

c. En appliquant la formule de Leibniz et sachant que

$$(x^3 + x^2 + 1)^{(k)} = 0, \quad \forall k \geq 4,$$

on obtient

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^3 - (3x-1)x^2 + (3x^2-5x)x - (x^3-4x^2+3x-1)) e^{-x}.$$

d. On a $f(x) = \mathcal{I}m(e^{(1+i)x})$ et par suite

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \mathcal{I}m((1+i)^n e^{(1+i)x}) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Exercice 4.6.

Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f :]-1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $] - 1, 1[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in] - 1, 1[$, on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+1} = (1-X^2)P'_n + (2n+1)XP_n$.

2. (a) Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$

- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P_{n+1} - (2n+1)XP_n - n^2(1-X^2)P_{n-1} = 0.$$

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = n^2P_{n-1}$.

- (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$n^2P_n - (2n-1)XP'_n - (1-X^2)P''_n = 0.$$

- (e) Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

1. Montrons par récurrence sur n , la propriété suivante

$$\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur }]-1, 1[\\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in]-1, 1[, f^{(n)}(x) = (1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}}P_n(x). \end{cases}$$

Pour $n = 0$, c'est évident puisque f est continue sur $] - 1, 1[$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n . Alors f est $(n+1)$ fois dérivable sur $] - 1, 1[$ et pour tout $x \in] - 1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= (1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}}P'_n(x) - (n+\frac{1}{2})(1-x^2)^{-n-\frac{3}{2}}(-2x)P_n(x) \\ &= (1-x^2)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}[(1-x^2)P'_n(x) + (2n+1)xP_n(x)]. \end{aligned}$$

Notons $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (2n + 1)XP_n \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\forall x \in]-1, 1[, f^{(n+1)}(x) = (1 - x^2)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} P_{n+1}(x).$$

D'où le résultat.

2. (a) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{1 - x^2} f(x).$$

(b) En appliquant la formule de Leibniz, on obtient

$$(1 - x^2)f^{(n+1)}(x) + n(-2x)f^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x) - xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = 0.$$

En remplaçant $f^{(n-1)}(x)$, $f^n(x)$ et $f^{(n+1)}(x)$ en fonction de P_{n-1} , P_n et P_{n+1} , on obtient le résultat.

(c) On a

$$\begin{aligned} P_{(n+1)} - (2n + 1)P_n &= n^2(1 - X^2)P_{n-1} \\ &= (1 - X^2)P'_n. \end{aligned}$$

(d) D'après 2.b, on a

$$P_n - (2n - 1)XP_{n-1} - (n - 1)^2(1 - X^2)P_{n-2} = 0.$$

Or d'après, 2 c, $P_{n-1} = \frac{1}{n^2}P'_n$ et par suite

$$(n - 1)^2 P_{n-2} = P'_{n-1} = \frac{1}{n^2} P''_n.$$

D'où le résultat.

(e) Dans 2.b, en prenant $X = 0$, on obtient

$$P_{n+1}(0) = n^2 P_{n-1}(0).$$

Comme $P_0 = 1$ et $P_1 = X$, on a $P_0(0) = 1$ et $P_1(0) = 0$. On a alors

$$P_{2p}(0) = (2p - 1)^2 (2p - 3)^2 \dots 1^2 \quad \text{et} \quad P_{2p+1}(0) = 0.$$

Exercice 4.7.

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \sqrt{\tan(\frac{x}{2})}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque notée f^{-1} .
2. Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0.

Preuve :

1. f est continue sur $[0, \pi[$, dérivable sur $]0, \pi[$ et on a

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cos(\frac{x}{2}) \sqrt{2 \sin x}} > 0.$$

f est alors strictement croissante sur $[0, \pi[$. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = +\infty$ donc $f([0, \pi[) = [0, +\infty[$ et par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2. La fonction f^{-1} est continue sur $I = [0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, de plus

$$\forall y \in]0, +\infty[, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = 2 \cos(\frac{x}{2}) \sqrt{2 \sin x}$$

où $x = f^{-1}(y)$. Donc $(f^{-1})'(y) = g \circ f^{-1}(y)$ où g est la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $g(x) = 2 \cos(\frac{x}{2}) \sqrt{2 \sin x}$. Or

$$\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = f^{-1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

donc $\lim_{y \rightarrow 0} (f^{-1})'(y) = 0$ et par suite, f^{-1} est dérivable en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$.

Exercice 4.8.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$, $\ln(\frac{x+y}{2}) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.
(Ind. : on commencera par montrer que la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe.)
2. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_+)^3$, $x_1 x_2^2 x_3^3 \leq (\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6})^6$.

Preuve :

1. Il est clair que f est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]1, +\infty[, f''(x) = \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} \geq 0,$$

donc f est convexe sur $]1, +\infty[$. D'où

$$\forall (x, y) \in (]1, +\infty[)^2, f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

En utilisant le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient le résultat.

2. Puisque la fonction $x \mapsto -\ln x$ est convexe sur $]0, +\infty[$ alors d'après l'inégalité de Jensen appliquée aux points (x_1, x_2, x_3) et aux coefficients $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, on a

$$-\ln\left(\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right) \leq -\frac{1}{6}\ln x_1 - \frac{1}{3}\ln x_2 - \frac{1}{2}\ln x_3.$$

Comme la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on obtient

$$\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq x_1^{\frac{1}{6}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{2}}.$$

D'où le résultat.

Exercice 4.9.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto -\ln x$ est convexe.
2. En déduire l'inégalité

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

3. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+)^3, a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \text{ et } (a + b + c)^3 \geq 27abc.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}.$$

Preuve :

1. La fonction $f : x \mapsto -\ln x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.
Et par suite, f est convexe.
2. En appliquant l'inégalité de Jensen avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, on obtient

$$-\ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}(\ln x_1 + \dots + \ln x_n).$$

3. On applique ce qui précède à $(x_1, x_2, x_3) = (a^3, b^3, c^3)$ puis $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c)$.
Pour la dernière inégalité, on prend pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = i$.

Chapitre 5

Développements limités

Résumé

- **Définition.**

- Soient f une fonction définie au voisinage de x_0 et n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 (noté $DL_n(x_0)$) lorsqu'il existe $n + 1$ réels $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f .

- Si f admet un DL d'ordre n en x_0 , alors celui-ci est unique.

- **Formule de Taylor-Young.**

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I et x_0 un point de I , alors f admet un DL d'ordre n en x_0 donné par

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x - x_0)^n).$$

- **Fonctions paires et impaires.**

Soit f une fonction admettant un $DL_n(x_0)$, alors

- Si f est paire alors la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f ne comporte que des puissances paires.
- Si f est impaire alors la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f ne comporte que des puissances impaires.

• **Développements limités usuels.**

Au voisinage de 0 et pour tout entier n

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

• **Utilisation d'un DL.** Si f est une fonction admettant un $\text{DL}_n(x_0)$:

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

et si p est le plus petit entier tel que $0 \leq p \leq n$ et $a_p \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{(x_0)}{\sim} a_p(x-x_0)^p,$$

en particulier, $f(x)$ est du signe de $a_p(x-x_0)^p$ au voisinage de 0.

• **Equivalents classiques.**

$$\sin x \underset{(0)}{\sim} x, \ln(1+x) \underset{(0)}{\sim} x, e^x - 1 \underset{(0)}{\sim} x, \operatorname{sh} x \underset{(0)}{\sim} x, \arctan x \underset{(0)}{\sim} x \text{ et } 1 - \cos x \underset{(0)}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 5.1.

Déterminer le développement limité de la fonction f à l'ordre n au point x_0 dans chacun des cas suivants :

- a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$, $n = 3$, $x_0 = 0$. b) $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $n = 2$, $x_0 = 0$.
c) $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, $n = 4$, $x_0 = 0$. d) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$, $n = 3$, $x_0 = 0$.
e) $f(x) = \ln(2 + \sin x)$, $n = 3$, $x_0 = 0$. f) $f(x) = \sqrt{3 + \cos x}$, $n = 3$, $x_0 = 0$.
g) $f(x) = \ln(1 + e^x)$, $n = 3$, $x_0 = 0$. h) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, $n = 3$, $x_0 = 0$.
i) $f(x) = \cos(\ln(x))$, $n = 3$, $x_0 = 1$. j) $f(x) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$, $n = 4$, $x_0 = 0$.
k) $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x})$, $n = 3$, $x_0 = 0$. l) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x})$, $n = 3$, $x_0 = 0$.

Preuve :

- a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) \underset{(0)}{=} -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
b) $f(x) = (1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) \underset{(0)}{=} e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$.
c) $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{(0)}{=} -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$.
d) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}} \underset{(0)}{=} e + \frac{e}{2}x + \frac{e}{48}x^3 + o(x^3)$.
e) $f(x) = \ln(2 + \sin x) \underset{(0)}{=} \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$.
f) $f(x) = \sqrt{3 + \cos x} \underset{(0)}{=} 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$.
g) $f(x) = \ln(1 + e^x) \underset{(0)}{=} \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$.
h) $f(x) = \ln(1 + \sin x) \underset{(0)}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
i) $f(x) = \cos(\ln x) \underset{(1)}{=} 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
j) $f(x) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) \underset{(0)}{=} \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$.
k) $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x}) \underset{(0)}{=} 2 \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.
l) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x}) \underset{(0)}{=} \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3)$.

Exercice 5.2.

1. Déterminer le développement limité de la fonction $x \mapsto \arctan x$ à l'ordre 3 au point $x_0 = 1$.
2. Déterminer le développement limité de la fonction $x \mapsto \arctan e^x$ à l'ordre 3 au point $x_0 = 0$.
3. Déterminer le développement limité de la fonction f à l'ordre n au point x_0 dans chacun des cas suivants :

- a) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$, $n = 3$, $x_0 = 0$. b) $f(x) = \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$, $n = 3$, $x_0 = 0$.
- c) $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, $n = 2$, $x_0 = 1$. d) $f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$, $n = 3$, $x_0 = 0$.
- e) $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{-x} - 1}$, $n = 2$, $x_0 = 0$.

Preuve :

1. On utilise le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 2 au point $x_0 = 1$, puis on intègre. On obtient

$$\arctan x \underset{(1)}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

2. On a

$$\begin{aligned} (\arctan e^x)' &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} \\ &\underset{(0)}{=} \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2+2x+2x^2+o(x^2)} \\ &\underset{(0)}{=} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(1-x+o(x^2)). \end{aligned}$$

donc $(\arctan e^x)' \underset{(0)}{=} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))$ et par suite

$$\arctan e^x \underset{(0)}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$

N.B. : On aurait pu utiliser 1., en remplaçant x par e^x puis appliquer le développement limité de $x \mapsto e^x$ en 0.

3. a) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^{-x}-1} \underset{(0)}{=} 1-x-\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{24}x^3+o(x^3).$
 b) $f(x) = \frac{x-\sin x}{1-\cos x} \underset{(0)}{=} \frac{1}{3}x+\frac{1}{90}x^3+o(x^3).$

- c) $f(x) = \frac{x-1}{\ln x} \underset{(1)}{=} 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$
- d) $f(x) = \frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} \underset{(0)}{=} \frac{2}{3}x + \frac{1}{190}x^3 + o(x^3).$
- e) $f(x) = \frac{\sin(x)}{e^{-x} - 1} \underset{(0)}{=} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2).$

Exercice 5.3.

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ est bijective et former le développement limité de sa fonction réciproque f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Preuve :

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$, de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque f^{-1} est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier f^{-1} admet un $DL_5(0)$. De plus, comme f est impaire, f^{-1} l'est aussi et le $DL_5(0)$ de f^{-1} est de la forme : $f^{-1}(x) \underset{(0)}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$

En réalisant un $DL_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$, on obtient :

$$f^{-1}(f(x)) \underset{(0)}{=} ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{1}{2}a + 3b + c\right)x^5 + o(x^5).$$

Or $f^{-1}(f(x)) = x$, donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = \frac{5}{2}$.

Exercice 5.4.

Donner le développement asymptotique de la fonction f dans chacun des cas suivants à la précision demandée :

- a) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ à la précision $x^{5/2}$.
- b) $f(x) = x^x$ à la précision $(x \ln x)^2$.

Preuve :

- a) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{5/2} + o(x^{5/2}).$
- b) $f(x) = x^x = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x).$

Exercice 5.5.

Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction f à la précision demandée :

- a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ à la précision $\frac{1}{x^{3/2}}$ b) $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ à la précision $\frac{1}{x^2}$
 c) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $\frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = \arctan x$ à la précision $\frac{1}{x^3}$

Preuve :

- a) $f(x) = \sqrt{x+1} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$
 b) $f(x) = x \ln(1+x) - (x+1) \ln x = -\ln x + 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$
 c) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2} \frac{1}{x} + \frac{11e}{24} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$
 d) $f(x) = \arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$

Exercice 5.6.

Réaliser un développement asymptotique de la suite $(u_n)_n$ à la précision demandée :

- a) $u_n = \ln(n+1)$ à la précision $\frac{1}{n^2}$. b) $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.
 c) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ à la précision $\frac{1}{n}$. d) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Preuve :

- a) $u_n = \ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$
 b) $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right).$
 c) $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$
 d) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Exercice 5.7.

Soit $f : [e, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- a) Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
- b) Réaliser un développement asymptotique à trois termes de f^{-1} en $+\infty$.

Preuve :

- a) f est dérivable sur $[e, +\infty[$ et on a $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0$ sur $]e, +\infty[$. Donc f est strictement croissante et elle réalise, par conséquent, une bijection de $[e, +\infty[$ vers $[e, +\infty[$.

- b) Pour tout $y \geq e$, $\frac{f^{-1}(y)}{\ln(f^{-1}(y))} = y$. Donc

$$\ln y = \ln(f^{-1}(y)) - \ln(\ln(f^{-1}(y))).$$

Lorsque $y \rightarrow +\infty$, $f^{-1}(y) \rightarrow +\infty$,

$$\ln(\ln(f^{-1}(y))) = o(\ln(f^{-1}(y))),$$

on en déduit que $\ln(f^{-1}(y)) \sim \ln y$, et par suite $f^{-1}(y) \sim y \ln y$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= y \ln(f^{-1}(y)) \\ &= y \ln(y \ln y + o(y \ln y)) \\ &= y \ln y + y \ln(\ln y + o(\ln y)) \\ &= y \ln y + y \ln(\ln y) + o(y \ln(\ln y)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= y \ln(f^{-1}(y)) \\ &= y \ln(y \ln y + y \ln(\ln y) + o(y \ln(\ln y))) \\ &= y \ln(y \ln y) + y \ln \left(1 + \frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(\frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f^{-1}(y) = y \ln y + y \ln(\ln y) + y \frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(y \frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right).$$

Exercice 5.8.

1) Déterminer un équivalent simple de la fonction f au voisinage de 0 :

- a) $f(x) = x(2 + \cos x) - 3 \sin x$, b) $f(x) = x^x - (\sin x)^x$,
 c) $f(x) = \arctan(2x) - 2 \arctan(x)$.

2) Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$, c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$.

3) Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}} \right)^{1/(2-x)}$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$,
 c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}$, ($a > 0$).

Preuve :

1. a) $f(x) = x(2 + \cos x) - 3 \sin x \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{60} x^5$.

b) $f(x) = x^x - (\sin x)^x = x^x \left(1 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^x \right) \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{6} x^3$.

c) $f(x) = \arctan(2x) - 2 \arctan(x) \underset{(0)}{\sim} -2x^3$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -\frac{e}{2}$.

3. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}} \right)^{1/(2-x)} = \frac{1}{3} 6^{4/13} 5^{5/26}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)^{x \ln x} = e$.

c) $x^a - a^x \underset{(a)}{\sim} a^a (1 - \ln a)(x - a)$.

si $a \neq 1$, $\arctan(x) - \arctan(a) \underset{(a)}{\sim} (x - a) \arctan'(a) = \frac{(x - a)}{1 + a^2}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = a^a (1 + a^2)(1 - \ln a)$.

Exercice 5.9.

Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.
2. Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Preuve :

1. On a $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$. Par suite f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$.
De plus ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$.
2. L'équation de la tangente en 0 est $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$ et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

Exercice 5.10.

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Plus encore, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \underset{(0)}{=} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow +0} -\frac{1}{2}.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.11.

Soit $f : x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
2. En déduire l'existence d'une courbe asymptotique à la courbe représentative de f .
3. Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Preuve :

1. On a $f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln(x)) = \ln 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(\frac{1}{x})$.
2. On déduit de ce qui précède que la courbe d'équation $y = \ln 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f .
3. La courbe d'équation $y = \ln 2x + \frac{1}{2}$ est au dessus de celle de f car au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{8x} < 0$.

Exercice 5.12.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Que peut-on conclure ?

Preuve :

Montrons par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Pour $n = 0$, c'est vérifié.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$f^{(n)}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P'_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} \text{ avec } P_{n+1} \in \mathbb{R}[X].$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $f^{(n+1)}(x) \stackrel{y=1/x^2}{=} P_{n+1}(\sqrt{y})e^{-y} \rightarrow 0$ et de même quand $x \rightarrow 0^-$. Par suite $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

En conclusion, f est $\mathcal{C}^n$ en 0 mais f n'admet pas de développement limité en 0 d'ordre n car sinon il existerait un voisinage de 0 sur lequel $f(x) = 0$, ce qui est absurde.

Chapitre 6

Intégrales et primitives d'une fonction continue

Résumé

- **Subdivision.**

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $a < b$. On appelle subdivision de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante de réels $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

- **Fonctions continues par morceaux.**

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe un entier n et une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ telle que $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ soit continue, admette une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

- **Somme de Riemann.**

Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, ($a < b$) et $n \in \mathbb{N}^*$. Partageons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même longueur à l'aide de la subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n-1}$, avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$.

On appelle somme de Riemann correspondant à cette subdivision la somme

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème : La suite des sommes de Riemann d'une fonction f continue sur $[a, b]$ converge vers l'intégrale de f sur $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt.$$

• **Primitive d'une fonction continue.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I . La fonction :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Pour toute primitive F de f sur I :

$$\int_a^x f(t)dt = [f(t)]_a^x = F(x) - F(a).$$

• **Primitives usuelles.**

Intervalle	Fonction	Primitive
$]0, +\infty[$	$x^m, m \neq -1$	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$] - \infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\mathbb{R}$	$e^{\lambda x}, \lambda \neq 0$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sin(ax) + C$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax), a \neq 0$	$-\frac{1}{a} \cos(ax) + C$
$] - \pi/2, \pi/2[$	$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$] - \pi/2, \pi/2[$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(ax), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh}(ax) + C$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(ax), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \operatorname{ch}(ax) + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$] - 1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

• **Intégration par parties.**

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

• **Changement de variables.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tous $a, b \in J$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Exercice 6.1.

Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \frac{1}{n} [\operatorname{ch}(\frac{1}{n}) + \operatorname{ch}(\frac{2}{n}) + \dots + \operatorname{ch}(\frac{n}{n})].$

b) $u_n = \frac{1}{n} \left[\tan(\frac{\pi}{4n}) + \tan(\frac{2\pi}{4n}) + \dots + \tan(\frac{n\pi}{4n}) \right].$

c) $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})^{\frac{1}{n}},$ puis $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}.$

d) $u_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \dots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta},$ où $\alpha > 0, \beta > 0.$

e) $u_n = \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n+k}}.$

Preuve :

a) $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\frac{k}{n}).$ La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{ch}x$ est continue sur $[0, 1],$ donc u_n est la somme de Riemann de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$ et par suite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \int_0^1 \operatorname{ch}x dx \\ &= [\operatorname{sh}x]_0^1 \\ &= \operatorname{sh}1. \end{aligned}$$

b) $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan(\frac{k\pi}{4n}).$ La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x)$ est continue sur $[0, 1].$ Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \int_0^1 \tan(\frac{\pi}{4}x) dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\pi}{4} \tan(\frac{\pi}{4}x) dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\ln(\cos(\frac{\pi}{4}x)) \right]_0^1 \\ &= -\frac{4}{\pi} \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

c) On pose $v_n = \ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n}).$ La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$f(x) = \ln(1+x)$. est continue sur $[0, 1]$, donc

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= \int_1^2 \ln x dx \\ &= [x \ln x - x]_1^2 \\ &= 2 \ln 2 - 2 + 1 \\ &= 2 \ln 2 - 1.\end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}$.

Il suffit de remarquer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{e}$. En effet,

$$\begin{aligned}u_n &= \left(\frac{(2n)!}{n!n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n} \dots \frac{2n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

d) Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \dots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{n}\beta} + \dots + \frac{1}{\alpha + \frac{n-1}{n}\beta} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha + \frac{k}{n}\beta}.\end{aligned}$$

La fonction

$$\begin{aligned}f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\alpha + \beta x}\end{aligned}$$

est continue sur $[0, 1]$, donc

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{dx}{\alpha + \beta x} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \frac{\beta}{\alpha} x}, \quad y = \frac{\beta}{\alpha} x \\ &= \frac{\alpha}{\alpha\beta} \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{dy}{1 + y} = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

$$\text{e) } u_n = \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n+k}}, \quad \ln u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \ln(n+k)$$

$$\begin{aligned}\ln u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} (\ln n + \ln(1 + \frac{k}{n})) \\ &= \ln n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(1 + \frac{k}{n})}{n+k}.\end{aligned}$$

On a

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \ln(1 + \frac{k}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \ln(1 + \frac{k}{n}).$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

De plus

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 6.2.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$, dans chacun des cas suivants :

1. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
2. Pour une fonction f en escalier sur $[a, b]$.
3. Pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Preuve :

1) Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On pose

$$\begin{aligned} u(t) = f(t) &\longrightarrow u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \sin(nt) &\longrightarrow v(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt). \end{aligned}$$

Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt &= \left[-\frac{1}{n} f(t) \cos(nt) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \\ &= -\frac{1}{n} f(b) \cos(nb) + \frac{1}{n} f(a) \cos(na) + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt,$$

et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.

2) Supposons que f en escalier sur $[a, b]$. La fonction $t \mapsto f(t) \sin(nt)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $s = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$ telle que

$$\forall i \in \{0, \dots, p-1\}, \forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad f(x) = \lambda_i.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt &= \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i (\cos(na_i) - \cos(na_{i+1})). \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} 2|\lambda_i|$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.

3) Supposons f continue par morceaux sur $[a, b]$. La fonction $t \mapsto f(t) \sin(nt)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon \geq 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Alors

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt - \int_a^b \varphi(t) \sin(nt) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \left| \int_a^b \varphi(t) \sin(nt) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après 2), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left| \int_a^b \varphi(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Exercice 6.3.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0, 1]$ telles que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \geq 1.$$

Preuve :

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right) &= \left(\int_0^1 (\sqrt{f(t)})^2 dt \right) \left(\int_0^1 (\sqrt{g(t)})^2 dt \right) \\ &\geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(t)} \sqrt{g(t)} dt \right)^2 \geq \int_0^1 dt = 1. \end{aligned}$$

Exercice 6.4.

1. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, T -périodique et impaire alors $\int_0^T f(t)dt = 0$.
2. Calculer $\int_0^\pi (\sin t)^{2p+1} (\cos t)^{2q+1} dt$, p et q deux entiers naturels.
3. Soit f une fonction continue, T -périodique sur $\mathbb{R}$.
Montrer de deux manières différentes que la fonction

$$g : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)dt$$

est constante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

- 1) La fonction f est continue sur $[-T, T]$ et on a

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T f(t)dt &\stackrel{\{x=-t\}}{=} \int_T^{-T} f(-x)(-dx) \\ &= \int_{-T}^T f(-x)dx \\ &= - \int_{-T}^T f(x)dx, \quad (f \text{ impaire}). \end{aligned}$$

D'où $\int_{-T}^T f(t)dt = 0$, et par suite

$$\int_{-T}^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt = 0.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_{-T}^0 f(t)dt &= \int_0^T f(u-T)du, \quad (u = t+T) \\ &= \int_0^T f(u)du \quad (\text{car } f \text{ est } T\text{-périodique}). \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_0^T f(t)dt = 0$.

- 2) La fonction $t \mapsto \sin^{2p+1} t \cos^{2q+1} t$ est continue sur $\mathbb{R}$, π -périodique et impaire. D'où

$$\int_0^\pi \sin^{2p+1} t \cos^{2q+1} t dt = 0$$

3) 1^{ère} méthode :

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (F existe puisque f continue sur $\mathbb{R}$). On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = F(x+T) - F(x).$$

g est dérivable (car F est dérivable sur $\mathbb{R}$) et

$$\begin{aligned} g'(x) &= F'(x+T) - F'(x) \\ &= f(x+T) - f(x) \\ &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

2^{ème} méthode :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) &= \int_x^{x+T} f(t) dt \\ &= \int_x^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{x+T} f(t) dt \end{aligned}$$

et $g(0) = \int_0^T f(t) dt$. On a

$$\int_T^{x+T} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt.$$

Donc $g(x) = g(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.5.

I) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et vérifiant

$$\forall x \in [a, b], \quad f(a+b-x) = f(x).$$

1) Prouver que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

2) Application : Calculer $I = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} dt$.

II) Soit a un réel strictement positif et $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, a]$.

1) Prouver que $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$.

2) Application : Calculer $I = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$.

Preuve :

- I) 1) Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = xf(x)$ et $\varphi(x) = a + b - x$, $x \in [a, b]$. Alors g est continue sur $[a, b]$, φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b tf(t)dt = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} g(t)dt.$$

D'après le théorème de changement de variables, on a

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} g(t)dt &= \int_b^a g(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= - \int_b^a (a+b-x)f(a+b-x)dx \\ &= \int_a^b (a+b)f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b tf(t)dt = (a+b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx,$$

et par suite

$$\int_a^b tf(t)dt = \frac{(a+b)}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

- I) Application : La fonction

$$\begin{aligned} h : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \end{aligned}$$

est continue sur $[0, \pi]$ et $h(\pi - t) = h(t)$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} dt \\ &\stackrel{\{u=\cos t\}}{=} \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-du}{\sqrt{1 + u^2}} = 2 \times \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \\ &= \pi \left[\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^1 = \pi \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

- II) 1) Soit $a > 0$, $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

$$\int_0^a f(a-x)dx \stackrel{\{t=a-x\}}{=} \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_0^a f(t)dt.$$

2) Application : La fonction

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \end{aligned}$$

est continue sur $[0, \pi]$. Alors

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx - I.$$

$$\begin{aligned} 2I &= \pi \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx, \quad (u = \cos x) \\ &= \pi \int_1^{-1} \frac{-du}{1 + u^2} = \pi \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} \\ &= 2\pi [\arctan u]_0^1 = 2\pi \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Donc $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 6.6.

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

1. $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \arcsin^n x dx.$

2. $v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$

3. $w_n = \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx.$

Preuve :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, $0 \leq \arcsin^n x \leq (\frac{\pi}{2})^n, \forall x \in [0, 1]$. Donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n = 0, \forall a > 1, a^n = o(n!)$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2) On a

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx - \int_0^\pi \sin x dx \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{-x \sin x}{x+n} dx \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{-x \sin x}{x+n} \right| dx = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{x+n} dx \\ &\leq \int_0^\pi \frac{\pi^2}{n} dx = \frac{\pi^2}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx - \int_0^\pi \sin x dx = 0$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

Exercice 6.7.

Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- 1) Montrer que f est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
- 3) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Preuve :

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. et $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt \text{ est impaire sur } \mathbb{R} \quad \left(\int_0^x e^{t^2} dt = - \int_0^x e^{t^2} dt \right).$$

Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 1 = -2xf(x) + 1 \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) + 2xf(x) = 1.$$

3. Pour $x \geq 1$, par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^x e^{t^2} dt &= \int_1^x \frac{1}{2t} 2te^{t^2} dt = \left[\frac{1}{2t} e^{t^2} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|1 - 2xf(x)| &= |1 - 2xe^{-x^2} \int_1^x e^{t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt| \\ &= |1 - 1 + exe^{-x^2} - xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt| \\ &\leq xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt.\end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Pour $x \geq 2$

$$\begin{aligned}0 &\leq xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \\ &= xe^{-x^2} \int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + xe^{-x^2} \int_{x-1}^1 \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \\ &\leq x(x-2)e^{-x^2} \frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2} e^{x^2} \int_{x-1}^x \frac{dt}{t^2} \\ &= x(x-2)e^{-2x+1} + x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= x(x-2)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-2)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1} = 0$ et par suite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = 0.$$

Exercice 6.8.

Soient x un réel et k un entier strictement positif. On pose

$$I_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^k t} dt.$$

- 1) Calculer $I_1(x)$. (On pourra faire le changement de variables $u = e^t$).
- 2) En intégrant par parties, trouver une relation entre $I_{k+2}(x)$ et $I_k(x)$. (On pourra remarquer que $\frac{1}{\operatorname{ch}^k t} = \frac{\operatorname{cht}}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$).
- 3) Démontrer que la fonction I_k est impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- 4) Calculer $I'_k(x)$, $I''_k(x)$ et $I'''_k(x)$.
- 5) Donner le développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. $I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$

1.

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{cht}} = 2 \int_0^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}}.$$

On pose $u = e^t$ $du = u dt \Rightarrow dt = \frac{du}{u}$

$$\begin{aligned} I_1(x) &= 2 \int_1^{e^x} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} \\ &= 2 \int_1^{e^x} \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= 2 [\arctan u]_1^{e^x} = 2(\arctan e^x - \frac{\pi}{4}) = I_1(x). \end{aligned}$$

2. On a

$$I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t} = \int_0^x \frac{\operatorname{cht}}{\operatorname{ch}^{k+1} t} dt.$$

On pose

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t} &\longrightarrow u'(t) = -(k+1) \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^{k+2} t} \\ v'(t) = \operatorname{cht} &\longrightarrow v(t) = \operatorname{sh} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_k(x) &= \left[\frac{\text{sh}t}{\text{ch}^{k+1}t} \right]_0^x + (k+1) \int_0^x \frac{\text{sh}^2t}{\text{ch}^{k+2}t} dt \\
&= \frac{\text{sh}x}{\text{ch}^{k+1}x} + (k+1) \int_0^x \frac{\text{ch}^2t}{\text{ch}^{k+2}t} dt - (k+1) \int_0^x \frac{1}{\text{ch}^{k+1}t} dt \\
&= \frac{\text{sh}x}{\text{ch}^{k+1}x} + (k+1)I_k - (k+1)I_{k+2}(x) \\
(k+1)I_{k+2}(x) &= \frac{\text{sh}t}{\text{ch}^{k+2}t} + kI_k(x).
\end{aligned}$$

3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
I_k(-x) &\stackrel{\{u=-t\}}{=} \int_0^{-x} \frac{dt}{\text{ch}^k t} \\
&= \int_0^x \frac{-du}{\text{ch}^k(-u)} = -I_k(x).
\end{aligned}$$

D'où I_k est impaire sur $\mathbb{R}$. De plus, $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}^k t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc I_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
I'_k(x) &= \frac{1}{\text{ch}^k x} \\
I''_k(x) &= -k \frac{\text{sh}x}{\text{ch}^{k+1}x} \\
I_k^3(x) &= -k \left(\frac{1 - k \text{sh}^2 x}{\text{ch}^{k+2}x} \right) \\
\left(\text{ou } I_k^3(x) &= -k \left(\frac{\text{ch}^2 x - (k+1) \text{sh}^2 x}{\text{ch}^{k+2}x} \right) \right)
\end{aligned}$$

5. La fonction I_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
I_k(x) &= I_k(0) + I'_k(0)x + I''_k(0)\frac{x^2}{2} + I_k^3(0)\frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&= 0 + x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} - k \frac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$I_k(x) \underset{0}{=} x - k \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Exercice 6.9.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$.

1. Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ et $I_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$ et $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.
4. Montrer que la suite $(\sqrt{n} I_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Preuve :

1. On pose $u = \frac{\pi}{2} - t$, alors $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du$. Comme la fonction $t \rightarrow \sin^n t$ est continue et positive sans être la fonction nulle donc $I_n > 0$.
2. On a $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n+1} t dt$. En effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) = \sin^{n+1} t &\longrightarrow u'(t) = (n+1) \sin^n t \cos t \\ v'(t) = \sin t &\longrightarrow v(t) = -\cos t, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^n t dt \\ &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}. \end{aligned}$$

D'où $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$ et donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

3. Posons $u_n = (n+1) I_{n+1} I_n$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+2) I_{n+2} I_{n+1} \\ &= (n+2) \frac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1} = u_n. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_n$ est une suite constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

De plus,

$$\sin^{n+2} t \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t.$$

Donc

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. On a $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. Ainsi $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$ et par suite

$$(n+1)I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} nI_n.$$

Donc $nI_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{I_n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 6.10.

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$.
 - (a) Intégrer par parties $J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$.
 - (b) En déduire la valeur de I_n et retrouver I .

Preuve :

1. On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} d\theta, \quad (u = \tan \theta) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$2. (a) \text{ On a } J_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)^{1/n}}.$$

$$\begin{aligned} u(x) = (1+x^n)^{-\frac{1}{n}} &\longrightarrow u'(x) = -x^{n-1}(1+x)^{-\frac{1}{n}-1} \\ v'(x) = 1 &\longrightarrow v(x) = x \end{aligned}$$

D'où

$$J_n = \left[x(1+x^n)^{-\frac{1}{n}} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{1}{n}+1}} dx.$$

(b)

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2^{1/n}} + \int_0^1 \frac{1+x^n}{(1+x^n)^{\frac{1}{n}+1}} dx - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)(1+x^n)^{1/n}} \\ &= \frac{1}{2^{1/n}} + J_n - I_n \end{aligned}$$

$$\text{Donc } I_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}. \text{ On a } I = I_2 = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 6.11.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \int_0^1 t^n e^{-tx} dt.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \frac{1}{n+1}$.
2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que $f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n e^{-u} du$ et déduire que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $f'_n(x)$ puis montrer que $f'_n(x) = -f_{n+1}(x)$.
(c) Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, montrer par récurrence sur l'entier p que $f_n^{(p)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et que $f_n^{(p)}(x) = (-1)^p f_{n+p}(x)$.
3. (a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \int_0^x u^n e^{-u} du$ au voisinage de 0 à l'ordre $n+2$.
(b) Dédire le développement limité de f_n au voisinage de 0 à l'ordre 1.
(c) Montrer alors que f_n est dérivable en 0 et que $f'_n(0) = -\frac{1}{n+2}$.
(d) Dédire que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$.

Preuve :

$$1. f_n(0) = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

2. (a) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^1 t^n e^{-tx} dt \quad \text{on pose } u = tx, \quad du = x dt \\ &= \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^n e^{-u} \frac{du}{x} \\ &= \int_0^x \frac{u^n}{x^{n+1}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n e^{-u} du. \end{aligned}$$

La fonction $u \mapsto u^n e^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}$ D'où la fonction $x \mapsto \int_0^x u^n e^{-u} du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \mapsto \frac{1}{x^{n+1}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, donc f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{x^{n+1}} x^n e^{-x} + \frac{-(n+1)}{x^{n+2}} \int_0^x u^n e^{-u} du \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{(n+1)}{x^{n+2}} \left(\left[\frac{1}{n+1} u^{n+1} e^{-u} \right]_0^x + \frac{1}{n+1} \int_0^x u^{n+1} e^{-u} du \right) \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x^{n+2}} \int_0^x u^{n+1} e^{-u} du = -f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

(c) Pour $p = 0$, $f_n^{(0)} = f_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $p = 1$, $f'_n(x) = -f_{n+1}(x), x \neq 0 \Rightarrow f'_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $f_n^{(p)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^p f_{n+p}(x).$$

On a $f_n^{(p+1)}(x) = (f_n^{(p)})'(x) = (-1)^p f'_{n+p}(x) \Rightarrow f_n^{(p+1)}(x) = (-1)^{p+1} f_{n+p+1}(x)$.

Donc $f_n^{(p)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f_n^{(p)} = (-1)^p f_{n+p}$.

3. (a) On a

$$\begin{aligned} u^n e^{-u} &\underset{0}{=} u^n(1-u) + o(u^{n+1}), \\ &\underset{0}{=} u^n - u^{n+1} + o(u^{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x u^n e^{-u} du \\ &\underset{0}{=} F(0) + \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} + o(x^{n+2}), \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^x u^n e^{-u} du = \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} + o(x^{n+2}).$$

(b) Il est clair que $f_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}x + o(x)$.

(c) f_n admet un $DL_1(0) \Rightarrow f_n$ est dérivable en 0 et $f'_n(0) = -\frac{1}{n+2}$.

(d) f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'_n = -f_{n+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, f_n est dérivable en 0 alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_n(x) = - \lim_{x \rightarrow +0} f_{n+1}(x) = -\frac{1}{n+2} = -f_{n+1}(0) = f'_n(0).$$

D'où f'_n est continue en 0. Donc f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.12.

I. Déterminer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) \int t \ln t dt & 2) \int t \arctan t dt & 3) \int (t^2 - 1)e^{-t} dt & 4) \int \arctan t dt \\ 5) \int \arcsin t dt & 6) \int \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt & 7) \int \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2} dt. \end{array}$$

II. Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \quad 2) \int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt \quad 3) \int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2} \quad 4) \int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1} dt.$$

III. Déterminer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) \int \sin^4 t \cos^3 t dt & 2) \int \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t} dt. & 3) \int \frac{\sin^3 t}{2 + \cos t} dt \\ 4) \int \frac{1}{2 + \cos t} dt & 5) \int \frac{\operatorname{sh}^3 t}{\operatorname{cht}(2 + \operatorname{ch}^2 t)} dt & 6) \int \frac{dt}{(e^t + 2)^2} \\ 7) \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}} dt. \end{array}$$

Preuve :

I. 1) On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) = \ln t & \longrightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = t & \longrightarrow v(t) = \frac{1}{2}t^2, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\int t \ln t dt &= \frac{1}{2}t \ln t - \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 + cte.\end{aligned}$$

2) On pose

$$\begin{aligned}u(t) = \arctan t &\longrightarrow u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = t &\longrightarrow v(t) = \frac{1}{2}t^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int t \arctan t dt &= \frac{1}{2}t^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{2}t^2 \arctan t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \arctan t + cte.\end{aligned}$$

3) On pose $\int (t^2 - 1)e^{-t} dt = (at^2 + bt + c)e^{-t} + cte$. En dérivant les deux membres de l'égalité, on obtient

$$\begin{aligned}(t^2 - 1)e^{-t} &= (2at + b)e^{-t} - (at^2 + bt + c)e^{-t} \\ &= (-at^2 + (2a - b)t + (b - c))e^{-t}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = -2, \\ c = -1, \end{cases}$$

$$\text{d'où } \int (t^2 - 1)e^{-t} dt = (-t^2 - 2t - 1)e^{-t} + cte.$$

4) En effectuant une intégration par parties

$$\begin{aligned}u(t) = \arctan t &\longrightarrow u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = 1 &\longrightarrow v(t) = t,\end{aligned}$$

$$\text{on obtient } \int \arctan t dt = \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + cte.$$

5) En posant

$$\begin{aligned}u(t) = \arcsin t &\longrightarrow u'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v'(t) = 1 &\longrightarrow v(t) = t,\end{aligned}$$

$$\text{on obtient } \int \arcsin t dt = t \arcsin t - \sqrt{1-t^2} + cte.$$

6) En posant $u = e^t$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt &= \int \frac{udu}{u + 1} \\ &= \int 1 - \frac{1}{1 + u} du \\ &= u - \ln(1 + u) + cte \\ &= e^t - \ln(1 + e^t) + cte.\end{aligned}$$

7) En posant $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2} dt &= \int \frac{\ln t}{1 + (\ln t)^2} \frac{dt}{t} \\ &= \int \frac{u}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + cte \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + (\ln t)^2) + cte.\end{aligned}$$

II. 1) On pose $t = \sin u$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4} \sin 2u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2) On pose $x = \cos t$,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{3 + x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

3)

$$\int_1^e \frac{dt}{1 + t(\ln t)^2} \underset{\{u=\ln t\}}{=} \int_0^1 \frac{u}{1 + u^2} = [\arctan u]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

4) On pose $u = e^t$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1} &= \int_1^e \frac{du}{u(u + 1)} = \int_1^e \frac{du}{u} - \int_1^e \frac{du}{u + 1} \\ &= [\ln u - \ln(1 + u)]_1^e = \ln 2 - \ln(e + 1) + 1.\end{aligned}$$

III. 1) En effectuant le changement de variables $u = \sin t$, on a

$$\begin{aligned}\int \sin^4 t \cos^3 t dt &= \int (1 - u^2) u^4 du \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + cte.\end{aligned}$$

2) $I(x) = \int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$. On pose $u = \sin x$, alors

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{(1 - u^2)(1 - u^2)^2}{u^2 + u^4} du \\ &= \int \frac{2 - 3u^2 + u^4}{u^2(1 + u^2)} du \\ &= \int 1 - \frac{2}{u^2} - \frac{6}{1 + u^2} du \\ &= u - \frac{2}{u} - 6 \arctan u + cte \\ &= \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \arctan(\sin x) + cte.\end{aligned}$$

3) Dans ce cas, le changement de variable $u = \cos x$ est adéquat et on a

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx \\ &= \int \frac{u^2 - 1}{2 + u} du \\ &= \int u - 2 + \frac{3}{2 + u} du \\ &= \frac{u^2}{2} - 2u + 3 \ln(u + 2) + cte \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln(2 + \cos x) + cte.\end{aligned}$$

4) On pose $s = \tan t/2$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2 + \cos t} dt &= \int \frac{1}{2 + \frac{1-s^2}{1+s^2}} \frac{2ds}{1+s^2} \\
 &= 2 \int \frac{ds}{2(1+s^2) + (1-s^2)} \\
 &= 2 \int \frac{ds}{3+s^2} \\
 &= \frac{2}{3} \int \frac{ds}{1 + (\frac{s}{\sqrt{3}})^2} \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) + cte \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\tan \frac{t}{2}\right)\right) + cte.
 \end{aligned}$$

5) On pose $u = \text{cht}$,

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \int \frac{u^2 - 1}{u(2 + u)} du \\
 &= \int \frac{-1}{2u} du + \int \frac{\frac{3}{2}u}{2 + u^2} du \\
 &= -\frac{1}{2} \ln u + \frac{3}{2} \frac{1}{2} \ln(2 + u^2) + cte,
 \end{aligned}$$

D'où

$$I(t) = -\frac{1}{2} \ln(\text{cht}) + \frac{3}{4} \ln(2 + \text{ch}^2 t) + cte$$

6) On pose $u = e^x$,

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int \frac{dx}{(e^x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{du}{u(u+2)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{(u+2)^2} - \frac{1}{u+2} \right) du \\
 &= \frac{1}{4} \ln u + \frac{2}{u+2} - \ln(u+2) + cte \\
 &= \frac{1}{4} \left(x + \frac{2}{e^x + 2} - \ln(e^x + 2) \right) + cte.
 \end{aligned}$$

7) Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\&= \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right).\end{aligned}$$

On pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, alors

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}t - 1)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}} \frac{\sqrt{3}}{2} dt \\&= \frac{1}{2} \int \frac{t\sqrt{3} - 1}{\sqrt{1+t^2}} dt.\end{aligned}$$

On pose $t = \text{sh}\varphi$

$$\begin{aligned}I(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{3}\text{sh}\varphi - 1}{\text{ch}\varphi} \text{ch}\varphi d\varphi \\&= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ch}\varphi - \frac{1}{2} \varphi + cte \\&= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + cte \\&= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + cte.\end{aligned}$$

Chapitre 7

Equations différentielles

Résumé

- **Equations linéaires du premier ordre.**

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + a(t)y = b(t)$$

est la somme d'une solution particulière et de la solution générale sur I de l'équation sans second membre associée : $y' + a(t)y = 0$.

— La solution de l'équation sans second membre est de la forme

$$y(t) = \lambda \exp(-A(t)), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où A est une primitive de a sur I .

— Pour déterminer une solution particulière, on pose

$$y_p(t) = \lambda(t) \exp(-A(t))$$

et on utilise la méthode de la variation de la constante.

- **Equations linéaires du second ordre à coefficients constants.**

Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. La solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre associée :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

- Résolution de l'équation sans second membre $(H) : ay'' + by' + cy = 0$
L'équation du second degré $(\tau) : ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique associée à (E)** .

Deux cas se présentent :

- ▷ Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$. Alors (τ) admet deux racines complexes r_1 et r_2 et dans ce cas la solution générale de (H) est

$$y(t) = \lambda_1 \exp(r_1 t) + \lambda_2 \exp(r_2 t), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

- ▷ Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Alors (τ) admet une racine double r et dans ce cas la solution générale de (H) est

$$y(t) = y(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2) \exp(rt), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2.$$

- **Cas particulier :** Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on cherche à déterminer les solutions réelles. Dans ce cas, trois cas se présentent :

- ▷ Si $\Delta > 0$ alors (τ) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . Dans ce cas, la solution générale de (H) est

$$y(t) = \lambda_1 \exp(r_1 t) + \lambda_2 \exp(r_2 t), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- ▷ Si $\Delta = 0$ alors (τ) admet une racine double r et la solution de (H) s'écrit sous la forme

$$y(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2) \exp(rt), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- ▷ Si $\Delta < 0$ alors (τ) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$ et la solution de (H) est

$$y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \exp(\alpha t), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Recherche d'une solution particulière dans le cas où $f(t) = P(t) \exp(mt)$, où P est un polynôme et $m \in \mathbb{C}$.

- ▷ Si m n'est pas une racine de (τ) alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = Q(t) \exp(mt), \quad \deg(Q) = \deg(P).$$

- ▷ Si m est une racine simple de (τ) alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = Q(t) \exp(mt), \quad \deg(Q) = \deg(P) + 1.$$

- ▷ Si m est une racine double de (τ) alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = Q(t) \exp(mt), \quad \deg(Q) = \deg(P) + 2.$$

Exercice 7.1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = e^{2x} + e^x$; 2. $y' + th(x)y = sh(x)$; 3. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$;
4. $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{\ln^2(x)}$; 5. $xy' - y = x \ln(x)$; 6. $xy' - (x+1)y = x^2 \sqrt{1+e^x}$.

Preuve :

1. Soit $(E) : y' + y = e^{2x} + e^x$. On cherche les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$.

La solution homogène de l'équation sans second membre est

$$y_H(x) = \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On pose $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x}$. y_p est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\lambda'(x) = e^{3x} + e^{2x}.$$

Il suffit de prendre $\lambda(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x}$ et par suite $y_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x$ est une solution particulière de (E) .

En conclusion, la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme

$$y_G(x) = \lambda e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation homogène associée à (E) est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_H(x) = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour la recherche d'une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante et on pose

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\operatorname{ch} x},$$

on obtient $\lambda(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}^2(x)$ et donc $y_p(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch} x$.

En conclusion, la solution générale sur $\mathbb{R}$ est

$$y_G(x) = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{2}\operatorname{ch} x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et on trouve

$$y_G(x) = \lambda e^{-x^2} + e^{x-x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. On cherche les solutions définies sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. On obtient

Sur $]0, 1[$, $y_H(x) = \lambda_1 x$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Sur $]1, +\infty[$, $y_H(x) = \lambda_2 x$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

et la solution particulière est $y_p(x) = -\frac{x}{\ln x}$.

En conclusion, la solution générale s'écrit sous la forme :

- Sur $]0, 1[$, $y_G(x) = \lambda_1 x - \frac{x}{\ln x}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

- Sur $]1, +\infty[$, $y_G(x) = \lambda_2 x - \frac{x}{\ln x}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

5. On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$. La solution homogène est

$$y_H(x) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la méthode de la variation de la constante, on obtient $y_p(x) = \frac{1}{2}x \ln^2 x$.

Donc la solution générale définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$y_G(x) = \lambda x + \frac{1}{2}x \ln^2 x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.2.

Soit l'équation différentielle $(E) : x(1-x)y' + (1-x)y = 1$.

1. Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) définie sur $] -\infty, 1[$ que l'on déterminera.
3. Existe-t-il une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Preuve :

1. Sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, la solution homogène est

$$y_H(x) = \frac{\lambda}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de (E) est $y_p(x) = -\frac{\ln|1-x|}{x}$. Et par suite, la solution générale de (E) est :

- Sur $] -\infty, 0[$, $y_G(x) = \frac{\lambda_1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

- Sur $]0, 1[$, $y_G(x) = \frac{\lambda_2}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

- Sur $]1, +\infty[$, $y_G(x) = \frac{\lambda_3}{x} - \frac{\ln(x-1)}{x}$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

2. On doit étudier le raccord en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\lambda_1}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda_1 = 0; \\ \infty, & \text{si } \lambda_1 \neq 0. \end{cases}$$

De même, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\lambda_2}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda_2 = 0; \\ \infty, & \text{si } \lambda_2 \neq 0. \end{cases}$$

Donc pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la fonction y définie par

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & \text{si } x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\}; \\ 1, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

est continue en 0 (car $y(0) = 1$) et elle est solution de l'équation (E) sur $] -\infty, 0[$ et $]0, 1[$. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 donc y est dérivable en 0.

Et par suite, la fonction y est l'unique solution de (E) sur $] -\infty, 1[$ vérifiant $y(0) = 1$.

3. Étudions le raccord en 1. On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{\ln(1-x)}{x} = -\infty$.

Donc il n'existe aucune solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.3.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 3y = (4x+1)\operatorname{sh}(x)$; 2. $y'' + y' = 3x - 2$; 3. $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$;
4. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \sin(3x)$; 5. $y'' + y = \cos^3(x)$; 6. $y'' - 2\alpha y' + y = e^{\alpha x}(x + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve :

1. L'équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. Donc

$$y_H(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-3x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On pose $f(x) = (4x+1)\operatorname{sh}x$. Alors $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ avec

$$f_1(x) = (2x + \frac{1}{2})e^x \quad \text{et} \quad f_2(x) = -(2x + \frac{1}{2})e^{-x}.$$

Donc, d'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est de la forme $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ où

y_1 (resp. y_2) est une solution particulière de $(E_1) : y'' + 2y' - 3y = f_1(x)$ (resp. $(E_2) : y'' + 2y' - 3y = f_2(x)$).

Déterminons d'abord y_1 . $f_1(x) = P_1(x)e^{m_1 x}$ avec $P_1(x) = 2x + \frac{1}{2}$ et $m_1 = 1$.

Comme $m_1 = 1$ est une racine simple de l'équation caractéristique alors $y_1(x) = Q_1(x)e^x$ avec $\deg(Q_1) = \deg(P_1) + 1 = 2$. On pose $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. y_1 est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$8ax + 4b + 2a = 2x + \frac{1}{2}.$$

D'où $a = \frac{1}{4}$ et $b = 0$. On pourra prendre $y_1(x) = \frac{1}{4}x^2e^x$.

On procède de la même manière pour $d_2(x) = P_2(x)e^{m_2x}$ avec $P_2(x) = -(2x + \frac{1}{2})$ et $m_2 = -1$.

Comme $m_2 = -1$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique alors $y_2(x) = Q_2(x)e^{-x}$ avec $\deg(Q_2) = \deg(P_2) = 1$. On pose $y_2(x) = (ax + b)e^{-x}$. y_2 est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$4(ax + b) = 2x + \frac{1}{2}.$$

D'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{8}$. D'où $y_2(x) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{8})e^{-x}$.

En conclusion, la solution générale

$$y_G(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-3x} + \frac{1}{4}x^2 e^x + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{8})e^{-x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Il est facile de voir que $y_G(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 + \frac{3}{2}x^2 - 5x$, où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. On a $y_H(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{-5x}$ où $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

La solution particulière est de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-5x}$. En dérivant et en remplaçant dans l'équation, on obtient $2a = 4$ donc $a = 2$, on prend $y_p(x) = 2x^2 e^{-5x}$.

En conclusion,

$$y_G(x) = (2x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)e^{-5x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4. On a $y_H(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

En écrivant $\sin(3x)e^{2x} = \mathcal{J}me^{(2+3i)x}$ et en posant $m = 2 + 3i$, on procède comme précédemment, on obtient que

$$Z_p(x) = (-\frac{1}{10} - \frac{1}{30}i)e^{(2+3i)x}$$

est une solution particulière sur $\mathbb{C}$ de l'équation $Z'' - 3Z + 2Z = e^{(2+3i)x}$.

Donc $y_p(x) = \mathcal{J}m(Z_p(x)) = -\frac{1}{10}e^{2x}\sin(3x) - \frac{1}{30}e^{2x}\cos(3x)$.

En conclusion, la solution générale est

$$y_G(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} - \frac{1}{10}e^{2x}\sin(3x) - \frac{1}{30}e^{2x}\cos(3x), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

5. On a $y_H(x) = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

En écrivant $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos x$ et en procédant comme l'exemple précédent, on obtient le résultat.

6. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $(\tau) : r^2 - 2\alpha r + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 4(\alpha^2 - 1)$.

— Si $\alpha \in \{-1, 1\}$. Dans ce cas $\Delta = 0$ et la solution homogène est

$$y_H(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

. Si $\alpha = 1$ alors $y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$.

. Si $\alpha = -1$ alors $y_p(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$.

— Si $\alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Dans ce cas, $\Delta > 0$.

Les racines de (τ) sont $r_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} \neq \alpha$ et $r_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \neq \alpha$. Donc

$$y_H(x) = \lambda_1 e^{(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})x} + \lambda_2 e^{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\text{et } y_p(x) = \frac{1}{1 - \alpha^2}(x + 1)e^{\alpha x}.$$

— Si $\alpha \in]-1, 1[$. Dans ce cas, $\Delta < 0$ et les racines de (τ) sont complexes conjuguées $r_1 = \bar{r}_2 = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2}$ et par suite

$$y_H(x) = [\lambda_1 \cos(\sqrt{1 - \alpha^2}x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{1 - \alpha^2}x)]e^{\alpha x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{et } y_p(x) = \frac{1}{1 - \alpha^2}(x + 1)e^{\alpha x}.$$

Exercice 7.4.

Soient a, b deux réels et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation

$$f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)dt = ax + b.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que F est une solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

3. Déterminer F puis f .

Preuve :

1. On a

$$f(x) = ax + b + \int_0^x tf(t)dt - x \int_0^x f(t)dt.$$

La fonction $x \mapsto ax + b$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de plus f est continue sur $\mathbb{R}$ alors les fonctions $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ et $x \mapsto x \int_0^x f(t)dt$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme étant la somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ alors F est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$F'(x) = f(x) = ax + b - xF(x) + \int_0^x tf(t)dt$$

et

$$F''(x) = a - xF'(x) - F(x) + xf(x) = a - F(x).$$

Donc F vérifie l'équation $(E) : y'' + y = a$.

3. On remarque que $y_p(x) = a$ est une solution particulière de (E) et

$$y_H(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc

$$y(x) = a + \alpha \cos x + \beta \sin x, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

or F est une solution de (E) vérifiant $F(0) = 0$ et $F'(0) = b$ donc $\alpha = -a$ et $\beta = b$.

En conclusion, $F(x) = a - a \cos x + b \sin x \Rightarrow f(x) = a \sin x + b \cos x$.

Exercice 7.5.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : (1 + e^x)y'' + 2e^xy' + (2e^x + 1)y = xe^x.$$

1. En posant $z = (1 + e^x)y$, montrer que y est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution de l'équation du second ordre à coefficients constants

$$(E') : z'' + z = xe^x.$$

2. Résoudre l'équation (E') et déduire les solutions de l'équation (E) .
3. Donner la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Preuve :

1. Soit y une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $z = (1 + e^x)y$. La fonction z est une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$z' = (1 + e^x)y' \quad \text{et} \quad z'' = (1 + e^x)y'' + 2e^xy' + e^xy.$$

y est solution de $(E) \iff z$ est solution de l'équation $(E') : z'' + z = xe^x$.

2. La solution de l'équation sans second membre est

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière de (E') sous la forme

$$z_p = Q(x)e^x, \quad \deg(Q) = 1,$$

on pose alors $z_p(x) = (ax + b)e^x$, $a, b \in \mathbb{R}$.

En dérivant et en remplaçant dans (E') , on trouve $z_p(x) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})e^x$.

Donc la solution générale de (E') est

$$z_G(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})e^x, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de (E) sont alors

$$y_G(x) = \frac{1}{1+e^x} \left[C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})e^x, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right].$$

3. $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$ et $C_2 = 1$.

Exercice 7.6.

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$(E) : x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E) sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Existe-t-il une solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$?

Preuve :

1. On cherche les solutions définies sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. En utilisant la décomposition $\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$, La solution homogène est

$$\begin{aligned} y_H(x) &= \lambda \exp\left(-\int \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \lambda \frac{x^2+1}{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{— Sur }] -\infty, 0[, \quad y_H(x) = \lambda_1 \frac{x^2+1}{x}, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

— Sur $]0, +\infty[$, $y_H(x) = \lambda_2 \frac{x^2 + 1}{x}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Pour la solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante et on pose

$$y_p(x) = \lambda(x) \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Après dérivation, on obtient $y_p(x) = \frac{1}{x}$.

Donc la solution générale est :

Sur $] -\infty, 0[$, $y_G(x) = \lambda_1 \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{1}{x}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Sur $]0, 1[$, $y_G(x) = \lambda_2 \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{1}{x}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2. On doit étudier le raccord en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y_G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \lambda_1 x + \frac{\lambda_1 + 1}{x} = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda_1 = -1; \\ \infty, & \text{si } \lambda_1 \neq -1. \end{cases}$$

De même, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y_G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda_2 x + \frac{\lambda_2 + 1}{x} = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda_2 = -1; \\ \infty, & \text{si } \lambda_2 \neq -1. \end{cases}$$

Donc $y(x) = -x$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable en 0).

Exercice 7.7.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 4xy'' + 2y' - y = g(x); \quad g \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[).$$

1. En posant $y(x) = z(\sqrt{x})$ pour $x \in]0, +\infty[$, montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation :

$$(E') : z''(x) - z(\sqrt{x}) = g(x); \quad x \in]0, +\infty[.$$

2. Montrer qu'une solution z de (E') est également donnée par :

$$(E'') : z''(x) - z(x) = g(x^2), \quad x \in]0, +\infty[.$$

3. On pose $g(x) = \sqrt{x}e^{-2\sqrt{x}}$, $x \in]0, +\infty[$.
 - a) Intégrer l'équation (E'') sur $]0, +\infty[$.
 - b) Dédire une solution générale $y(x)$ de l'équation (E).
4. Donner la solution $y(x)$ de (E) qui satisfait $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

Preuve :

1. On a $y(x) = z(\sqrt{x})$ est solution de (E) . Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ donc Z vérifie $(E') : z''(x) - z(x) = g(x)$.
2. Puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$. Donc z est solution de (E') si et seulement si $z''(x) - z(x) = g(x^2)$.
3. La solution homogène de (E'') est $z_H(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Une solution particulière de (E'') est $z_p(x) = (\frac{1}{3}x + \frac{4}{9})e^{-2x}$. D'où la solution générale de (E'') est $z_G(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + (\frac{1}{3}x + \frac{4}{9})e^{-2x}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et par suite

$$y(x) = \alpha e^{\sqrt{x}} + \beta e^{-\sqrt{x}} + (\frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{4}{9})e^{-2\sqrt{x}}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta + \frac{4}{9} = 1.$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$

Chapitre 8

Fonctions à deux variables

Résumé

- **Limite d'une fonction en un point.**

Soit f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet une limite l en (x_0, y_0) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. On note $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l$.

- **Continuité d'une fonction en un point.**

On dit que f est continue au point (x_0, y_0) si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Si une fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ est continue en un point (x_0, y_0) alors chacune des deux applications partielles ($x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$) est continue en ce point. La réciproque est fausse.

- **Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert U est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle admet des dérivées partielles continues sur U .

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Alors f admet en tout point (x_0, y_0) de U une dérivée suivant tout vecteur $h = (h_1, h_2)$ et on a

$$D_h f(a_0) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

• **Dérivées partielles d'ordre supérieur.**

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

f est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si ces quatre dérivées secondes sont continues sur U .

• **Théorème de Schwarz.**

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U alors en tout point de U , on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Exercice 8.1.

Etudier l'existence et la limite éventuelle en $(0,0)$ de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned}\text{a) } f(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{b) } f(x,y) &= \frac{x^3}{y}, & \text{c) } f(x,y) &= \frac{xy}{x-y}, \\ \text{d) } f(x,y) &= \frac{x^2y}{x+y}, & \text{e) } f(x,y) &= \frac{x+2y}{x^2-y^2}, & \text{f) } f(x,y) &= \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \text{g) } f(x,y) &= \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}, & \text{h) } f(x,y) &= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}, & \text{i) } f(x,y) &= \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Preuve :

- a) $f(0, \frac{1}{n}) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Donc la fonction f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
- b) $f(0, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
- c) $f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
- d) $|f(x,y)| = |x| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$
- e) $f(0, -\frac{1}{n}) = 2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(0, \frac{1}{n}) = -2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
- f) $|f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$.
- g) $f(x,y) = x \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$ or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$. Donc $f(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$.

h) $f(x, -x + x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}$ qui tend vers ∞ . Donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

i) On a

$$|f(x, y)| \leq |x| \frac{x^2}{x^2 + y^2} + |y| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|,$$

$$\text{donc } f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

Exercice 8.2.

Etudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}, & \text{b) } f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^4}, & \text{c) } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \\ \text{d) } f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{xy}, & \text{e) } f(x, y) = x^y, & \text{f) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}. \end{array}$$

Preuve :

a) On a $f(\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$, donc f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

b) On a $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/2$. Et par suite f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

c) On a $0 \leq f(x, y) \leq \frac{1}{2|x|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ ou encore on a $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = O(r^2)$.

d) On a $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$. Donc f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

e) D'un part, on a $f(\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et d'autre part $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{\ln n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$. Donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

f) On a $|f(x, y)| \leq \frac{2|xy|}{|x| + |y|} \leq 2|x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$.

Exercice 8.3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.

b) Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Preuve :

a) Pour tout $t \neq 0$ et $h = (\alpha, \beta)$, on a

$$\frac{1}{t} (f((0,0) + t(\alpha, \beta)) - f(0,0)) = \frac{1}{t} (f(\alpha t, \beta t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0, \\ \beta^2/\alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Donc } D_h f(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0, \\ \frac{\beta^2}{\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) On a $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 \neq f(0,0)$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 8.4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Justifier que f est continue en $(0,0)$.

b) Etudier les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

Preuve :

a) On a $|f(x, y)| \leq |y| \frac{|x|}{|x| + |y|} \leq |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ donc $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$.

b) Pour tout $h \neq 0$, $f(h, 0) = f(0, h) = 0$ et par suite, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exercice 8.5.

Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de f

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve :

- a) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 Etudions la continuité en $(0, 0)$. On peut écrire

$$f(x, y) = (xy) \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) ((x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

f est continue en $(0, 0)$. Comme $f(x, y) = f(y, x)$, alors il suffit d'étudier l'existence de la dérivée partielle par rapport à x .

Par composition $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 \ln(x^2 + y^2) + \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} \right).$$

De plus, $f(t, 0) = 0$, $t \neq 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Enfin $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$, car $2xy \ln(x^2 + y^2) = 2y \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$.

Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue sur $\mathbb{R}^2$.

- b) Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $g(t) = \begin{cases} t \sin 1/\sqrt{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et comme $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction g est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f admet des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Etudions l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$.

$\frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)) = t \sin(\frac{1}{t})$, n'a pas de limite en 0. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas.

Comme $f(x, y) = f(y, x)$, alors il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Exercice 8.6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

- b) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et sont différents. Que peut-on en déduire ?

Preuve :

a) Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

De plus, $f(t, 0) = f(0, t) = 0$, $\forall t$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. D'autre part, on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0,$$

et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2|x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues en $(0, 0)$ et par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) On a

$$\frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \frac{1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty,$$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ n'existe pas. D'autre part, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Exercice 8.7.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3 + 3yx^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0), & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$.

c) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

a) Par changement en coordonnées polaires : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient

$$|f(x, y)| \leq 5r^5$$

donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$ ainsi f est continue en $(0, 0)$.

b) Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y^5 + 7x^2y^3 + 3x^4y}{(x^2 + y^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x^5 + 3x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Il est clair que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus, on a pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 12|y| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 8|x|.$$

Ceci montre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

D'où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

c) On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 2y$. Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = 2.$$

De même, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 3x$. Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x} = 3.$$

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 8.8.

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$.

c) $f(x, y) = x^3 + y^3$.

d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$.

e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Preuve :

- a) Le point critique de f est $(0, 3)$ et $f(0, 3) = -9$. Posons que $u = x$ et $v = y - 3$.
 $f(x, y) - f(0, 3) = u^2 + uv + v^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}(u + v^2)^2 \geq 0$. f admet un minimum en $(0, 3)$.
- b) Le point critique de f est $(1, 1)$ et $f(1, 1) = 4$. Posons $u = x - 1$ et $v = y - 1$

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(1, 1) &= u^2 + 2v^2 - 2uv \\ &= (v - u)^2 + v^2 \geq 0 \end{aligned}$$

f admet un minimum en $(1, 1)$.

- c) Le point critique est $(0, 0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) > 0 \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{1}{n}, 0\right) < 0.$$

Donc $(0, 0)$ n'est pas d'extremum pour f .

- d) Le point critique est $(0, 0)$.

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2} < 0.$$

Donc f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$.

- e) Les points critiques de f sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Etude en $(0, 0)$:

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) > 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^3} < 0.$$

Donc $(0, 0)$ n'est pas un extremum pour f .

Etude en $(1, 1)$. Posons $u = x - 1$ et $v = y - 1$.

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(1, 1) &= u^3 + 3u^2 + v^3 + 3v^2 - 3uv \\ &= \left(u^2 + \frac{3}{2}u^2\right) + \left(v^2 + \frac{3}{2}v^2\right) + \frac{3}{2}(u - v)^2 \end{aligned}$$

Comme

$$u^3 + \frac{3}{2}u^2 \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}u^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad v^2 + \frac{3}{2}v^2 \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}v^2 \geq 0,$$

on a localement $f(x, y) - f(1, 1) \geq 0$. Donc, f admet un minimum relatif en $(1, 1)$.

(Ce minimum ne peut être absolu car $f(-n, 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$).