



**Faculté des sciences mathématiques, physiques
et naturelles de Tunis**

Niveau: 1ère MPI Nov. 2021	Série n°3: Limites-Continuité-Dérivabilité	Matière: Analyse
-------------------------------	---	------------------

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes, si elles existent

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\ln x)}{x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\sin x}$, $a > 0$ et $a \neq 1$.

Exercice 2 Étudier la continuité des fonctions suivantes:

- $f : x \mapsto x + \sqrt{x - E(x)}$.
- $f : x \mapsto E(x) \sin \pi x$.
- $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$
- $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$
- $f : x \mapsto \begin{cases} x \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right), & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 3 Notre objectif est d'établir la proposition suivante:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose

$\exists (x_1, y_1) \in I^2$, $x_1 < y_1$ tel que $f(x_1) \geq f(y_1)$ et $\exists (x_2, y_2) \in I^2$, $x_2 < y_2$ tel que $f(x_2) \leq f(y_2)$.

Montrer que la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

s'annule. Conclure

Exercice 4 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Montrer que f est constante.
2. Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $|f(x)| = 1, \forall x \in I$. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = 1$ ou pour tout $x \in I$, $f(x) = -1$.

Exercice 5 On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n .
2. Calculer u_1 et u_2 puis vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on déduire concernant la suite $(u_n)_n$?
5. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente vers une limite que l'on notera l .
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l .

Exercice 6 Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité ainsi que la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x} + x}$, 2. $f_2(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
3. $f_3(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$, 4. $f_4(x) = \frac{1}{\arcsin x}$

Exercice 7 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leurs fonctions dérivées:

- (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$; (b) $g(x) = \begin{cases} \sin x \sin(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$;
- (c) $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Exercice 8 On pose $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. Préciser les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f .

2. (a) Dériver et simplifier f' sur le domaine de dérivabilité de f .
(b) En déduire une expression plus simple de f sur son domaine de définition.
3. Donner un changement de variables simple permettant de retrouver une expression simplifiée de f .

Exercice 9 1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ et $g(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ sont monotones sur $]0, +\infty[$. Quelle est leur limite en $+\infty$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\ln(1+n) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$.

Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?

Exercice 10 1. Etablir les inégalités suivantes:

(a) Pour tout $x \geq 0$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

2. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Exercice 11 Déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, (b) $f(x) = \cos^3 x$, (c) $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$, (d) $f(x) = e^x \sin x$.

Exercice 12 On considère la fonction $f(x) = \exp(\sin x) + \sin x$.

1. Montrer que f définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle qu'on déterminera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.
2. Déterminer le domaine sur lequel f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange qu'il existe c entre 1 et x tel que

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3!} (f^{-1})^{(3)}(c).$$

4. Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(\ln x)^2}$.

Exercice 13 On considère la fonction f définie sur $]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[$ par $f(x) =$

$\times \frac{x}{\ln x + 1}.$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0? On notera encore ce prolongement par f .

2. Etudier les variations de f .

3. Déterminer les points fixes de f .

résoudre l'eq $f(x) = x$

4. On définit une suite récurrente $(x_n)_n$ par

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

5. (a) Etudier les variations de la fonction $g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Dédire que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$.

(c) Déterminer la limite de $(x_n)_n$.

Exercice 14 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , telle qu'il existe une constante positive M vérifiant $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in I$.

Soient $a < b \in I$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq \frac{M}{2}|(x-a)(x-b)|.$$

On fixe $x \in I \setminus \{a, b\}$, et on définit une nouvelle fonction $g(t) = f(t) - K(t-a)(t-b)$, où K est une constante choisie de telle sorte que $g(x) = 0$.

1) Montrer qu'il existe $c \in I$, tel que $g''(c) = 0$. [Utiliser le théorème de Rolle, deux fois]

2) En déduire que $f(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)(x-b)$

3) Conclure.

Ex1:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1-x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2 - 1-x}{x^2(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}{\frac{\sin^2(x)}{x^2}} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{E(L(x))}{x} \quad y-1 < E(y) \leq y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$L(x) = \lfloor E(L(x)) \rfloor \leq L(x)$$

$$\frac{L(x)-1}{x} < \frac{E(L(x))}{x} < \frac{L(x)}{x} \quad \forall x > 0$$

$$\frac{L(x)-1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\frac{L(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{E(L(x))}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$T. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$$

Serie 3...

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\sin(x)} \quad a > 0 \quad a \neq 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{\sin x} = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a$$

$$= \ln(a)$$

Ex2:

$$f(x) = x + \sqrt{x - E(x)} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -E(x) \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto x \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mathbb{R}_+$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x - E(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x - E(x)} \text{ continue}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$x \mapsto f(x) \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

• Soit $n \in \mathbb{Z}$: continuité au pt n .

$$f(n) = n + \sqrt{n - E(n)} = n$$

$$\forall x \in [n, n+1[\quad E(x) = n$$

$$f(x) = x + \sqrt{x - n}$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n = f(n) \Rightarrow f \text{ continue à droite au pt } n$$

$$\bullet \forall x \in [n-1, n[\quad E(x) = n-1$$

$$f(x) = x + \sqrt{x - n + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n+1 \neq f(n) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue à gauche en } n \text{ donc}$$

f n'est pas continue en n ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow f(x) \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

①

$$2) f(x) = E(x) \sin \pi x \quad f(n) = E(n) \sin \pi n = 0$$

$$x \mapsto \sin \pi x \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$n \mapsto E(n) \text{ " " } \mathbb{R} \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto f(n) \text{ " " } \mathbb{R} \mathbb{Z}$$

$$\bullet \text{ Soit } n \in \mathbb{Z}. \quad n-1 \quad n \quad n+1$$

• continue au pt n.

$$\forall m \in [n, n+1[\quad E(x) = n$$

$$\Rightarrow f(x) = n \sin(\pi x)$$

$$\lim_{n^+} f(x) = \lim_{n^+} n \sin \pi x = 0 = f(n) \quad (1)$$

$$\bullet \forall x \in [m-1, m[\quad E(x) = m-1$$

$$f(x) = (m-1) \sin \pi x$$

$$\lim_{n^-} f(x) = 0 = f(n) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f \text{ continue au pt } n (n \in \mathbb{Z})$$

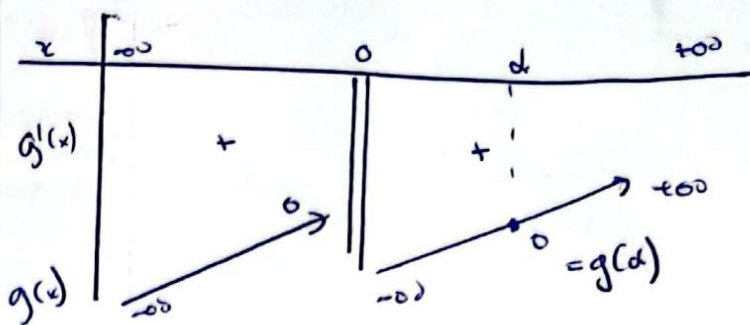
$$\Rightarrow f(x) \text{ continue sur } \mathbb{R}.$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } g(x) = x - e^{\frac{1}{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = x - e^{\frac{1}{x}} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}^*$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} > 0$$



$$Df = \mathbb{R} \setminus \{0, d\}$$

$$\bullet \lim_{d} g(x) = \lim_{d} \frac{d^2}{g(d)} = \infty \quad g \text{ n'est pas prolongeable}$$

par continuité end.

• en 0

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\bullet \lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{0^+} \frac{x}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = \text{soit } \frac{1}{x} = y \quad x \rightarrow 0^+ \quad \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{1}{y(1 - e^y)} = 0$$

car $y \rightarrow -\infty \quad (c'est \text{ l'exp qui nous s'oppose})$

$$\Rightarrow f \text{ est prolongeable par continuité end}$$

$$\text{par 0 ou on peut s'assurer unicité sur } \mathbb{R}^- \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Rappell T.V.I:

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continue $\Rightarrow f = \text{const?}$

Supposons que f est non cst; $\exists a, b \in \mathbb{R}$
($a \neq b$) et $f(a) \neq f(b)$.

$n \quad n+1 \quad n+2$
 (Suppression
 $n < m$)

$$\begin{cases} \text{ena} \\ f(u) = n < \underbrace{m + \frac{1}{2}}_{\beta} < n+1 \leq m = f(b) \end{cases}$$

↳ T.V.I : $\exists c$ entre a et b

absunde.

TVI s'applique uniquement sur un intervalle. $\int$

②

3)

$$0 \in]-1, 1[\quad \text{ma } \nexists c \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t.}$$

$\mathbb{R}^2$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$

3) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

2) $\forall x \in \mathbb{I} \quad f(x) = 1$ or $\forall x \in \mathbb{I} \quad f(x) = -1$

$$\exists b \in \mathbb{Z} \mid f(b) = -1$$

$\tau \vee I = 0$ 7c enter net b/

2 $|f(c)| = 1$ abschw.

A horizontal line with three points marked by vertical ticks. Below the line, the points are labeled 'a', 'c', and 'b' from left to right.

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$x \mapsto x^2 \text{ cont sur } \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ " sur } \mathbb{R}^*$$

$$x \mapsto \sin x \text{ " sur } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$,

• continuité à 0.

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\begin{array}{ccc} -x^2 & \leq & x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \\ x \rightarrow 0 & \downarrow & \downarrow \sin \rightarrow 0 \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

donc f continue en 0.

$\Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$c) f(x) = \begin{cases} x \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \forall x > 0; f(x) = x \ln(1+x^2) - x \ln(x)$$

$f(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$

(car $x \mapsto \ln(x)$ cont sur $]0, +\infty[$.)

$x \mapsto x; x \mapsto 1+x^2 > 0$ cont sur $\mathbb{R}$.

• continuité à droite en 0.

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x \ln(1+x^2)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{x \ln(x)}_{\rightarrow -\infty} = 0 = f(0). \end{aligned}$$

donc f est continue en 0.

$\Rightarrow f$ continue sur $\mathbb{R}^+$

Ex 4:

$$1) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$2) f \text{ T-périodique } T > 0.$$

$$\Rightarrow f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+nT) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}.$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

i) + ii) $\Rightarrow f$ constante sur $\mathbb{R}$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall (u_n)_n \subset \mathbb{R}; u_n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(u_n) \rightarrow \ell$$

Montrons que $f(x) = \ell; \forall x \in \mathbb{R}$!

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad u_n = x + nT \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

$$\begin{aligned} \text{or } f(u_n) &= f(x + nT) \\ &= f(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = \ell.$$

$x \mapsto \cos x \quad x \mapsto \sin x$
2 π -périodiques n'ont pas
de limite fixe en $+\infty$ (ou en $-\infty$)
car non constantes.

Ex 3:

I intervalle de $\mathbb{R}$.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue + injective.

Alors f est strictement monotone?

f strict $\nearrow$ ou f strict $\searrow$

$\forall x, y \in I$

ou

$\forall x, y \in I$

$x < y$

$f(x) < f(y)$

$x < y$

$\Rightarrow f(x) > f(y)$

par l'absurde:

Supposons $\exists (x_1, y_1) \in I \times I$

t.q. $x_1 < y_1$ et $f(x_1) \geq f(y_1)$ $\rightarrow$ n'est pas strict $\nearrow$

et $(x_2, y_2) \in I \times I$ t.q.

$x_2 < y_2$ et $f(x_2) \leq f(y_2)$

$\downarrow$ n'est pas strict $\searrow$

f injective sur $I \Rightarrow \forall a, b \in I$.

si $a \neq b$ alors $f(a) \neq f(b)$

donc $\begin{cases} x_1 < y_1 \Rightarrow f(x_1) > f(y_1) \\ x_2 < y_2 \Rightarrow f(x_2) < f(y_2) \end{cases}$ f injective

on pose $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$

$\varphi(t)$ continue sur $[0, 1]$

donc f est strict $\nearrow$ ou strict $\searrow$

$$\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

$\forall t \in [0, 1]$

$$(1-t)x_1 + tx_2$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in I & x_1 < x_2 \\ x_1 < (1-t)x_1 + tx_2 < x_2 & \text{on doit avoir} \\ \text{(a)} & \text{cas con} \\ \text{(b)} & \text{on va faire } f(\dots) \end{cases}$$

$$\bullet (1-t)x_1 + tx_2 - x_1 = t(x_2 - x_1) > 0$$

$\rightarrow$ (a) vraie.

$$\bullet (1-t)x_1 + tx_2 - x_2 =$$

$$= (1-t)(x_1 - x_2) < 0 \quad \text{(b) vraie.}$$

donc $(1-t)x_1 + tx_2 \in I$ ①

$(x_1, x_2) \in I$ et un pt entre x_1 et x_2 est aussi $\in I$

donc pour $(1-t)x_1 + ty_2$ ②

① + ② $\Rightarrow \varphi$ continue sur $[0, 1]$

$$\begin{cases} \varphi(0) = f(x_1) - f(y_1) > 0 \\ \varphi(1) = f(x_2) - f(y_2) < 0 \end{cases} \quad \text{T.V.I}$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0, 1[\text{ t.q. } \varphi(c) = 0$$

$$\Rightarrow f((1-c)x_1 + cx_2) = f((1-c)y_1 + cy_2)$$

$$\bullet \text{ si } x_1 < y_1 \quad \begin{cases} 1-c > 0 \\ \Rightarrow (1-c)x_1 < (1-c)y_1 \\ 0 < c < 1 \end{cases}$$

$$\bullet x_2 < y_2 \Rightarrow cx_2 < cy_2$$

$$\rightarrow (1-c)x_1 + cx_2 < (1-c)y_1 + cy_2$$

$a \neq b$ mais $f(a) = f(b)$ absurde car f injective.

Ex 5: (Suite implicite).

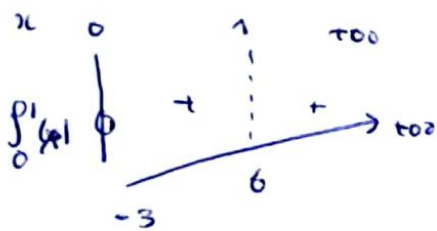
$$\forall n \in \mathbb{N}; f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$n=0 \quad f_0(x) = 1 + 9x^2 - 4 = 9x^2 - 3$$

$$\forall n \geq 1 \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

$n=0$ f_0 est continue dériv sur $\mathbb{R}$

$$f'_0(x) = 18x$$



f_0 continue strict $\nearrow$ donc bijective

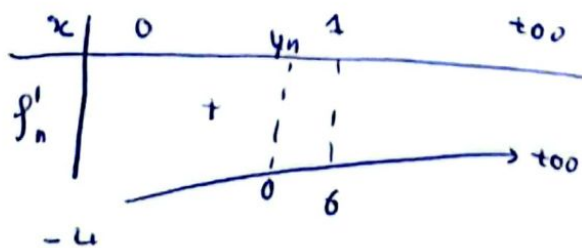
de $\mathbb{R}$ sur $[-3, +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} f_0(0) = -3 < 0 \\ f_0(1) = 6 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{TVI} \\ \Rightarrow \exists! u_0 \in]0, 1[\text{ tq} \end{array}$$

$$f_0(u_0) = 0 \quad u_0 = \frac{1}{3} !$$

$$\forall n \geq 1$$

$$f'_n(x) = n x^{n-1} + 18x > 0 \quad \forall x \neq 0$$



f_n est bij de $\mathbb{R}$ sur $[-4, +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} f_n(0) = -4 \\ f_n(1) = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{TVI} \\ \Rightarrow \exists! u_n \in]0, 1[\end{array}$$

$$\text{ tq } f_n(u_n) = 0$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f_1(x) &= x + 9x^2 - 4 \\ &= 9x^2 + x - 4 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 9 = 145$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{145}}{18} < 0$$

$$\boxed{x_2 = \frac{1 + \sqrt{145}}{18} \approx 0.7} \quad \text{II.1}$$

$$f_2(x) = 10x^2 - 4$$

$$= 2(5x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0.63}$$

$$u_n \in]0, \frac{2}{3}[; \quad \forall n \geq 1 !$$

$$f_n(0) = -4$$

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{TVI} \\ \Rightarrow \exists! u_n \in]0, 1[\text{ tq} \\ f(u_n) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n \in]0, \frac{2}{3}[} \quad \forall n \geq 1$$

$$\boxed{f_n(u_n) = 0} \quad \forall n$$

Scanné avec CamScanner

Ex 6 :

$$1) f_1(x) = \sqrt{x} + x$$

$$Df_1 = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0; \sqrt{x} + x \geq 0\}$$

car $x \geq 0$
 $\sqrt{x} + x \geq 0$

$$Df_1 = \mathbb{R}_+$$

continuité

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto \sqrt{x} \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \sqrt{x} \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} f_1 \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

dérivabilité

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto \sqrt{x} \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \sqrt{x} \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \Rightarrow f_1 \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$\forall x > 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} > 0$

$\forall x > 0$

$$f'_1(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x} + x} = \frac{1 + 2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x} + x}$$

dérivabilité en 0+

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x+x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$$

= car $f_1(x)$ n'est pas dérivable en 0 donc $f_1(x)$ est $\subseteq$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$2) f_2(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$Df_2 = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2 + 1} + x > 0\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x|$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 1} < x < \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x + \sqrt{x^2 + 1} < 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$Df_2 = \mathbb{R}$$

continuité :

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \ln(x) \text{ est } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \end{array} \right\} \Rightarrow f_2 \text{ est } \subseteq \text{ et } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et on a : } f'_2(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$3) f_3(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$$

$$Df_3 = \{x \in \mathbb{R}; 1 - \sin x \neq 0 \text{ et } \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} > 0\}$$

$$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 < \sin(x) < 1 \Leftrightarrow -1 < -\sin x < 1$$

$$0 < 1 + \sin x < 2 \quad 0 < 1 - \sin x < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} < 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} > 0 \text{ssi } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$Df_3 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

cont et dériv :

f_3 est $\subseteq$ et $\subseteq$ sur son domaine de définition.

$$x \mapsto \ln(x) \text{ cont dériv sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto \sin x \text{ " " sur } \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \text{ est } \subseteq \text{ et } \subseteq \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

$$f_3 \subseteq \text{ et } \subseteq \text{ sur } Df_3$$

et on a $f'_3(x) = \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right)' \cdot \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$$= \frac{(\cos x)(1-\sin x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \cdot \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

4) $f_4(x) = \frac{1}{\arcsin x}$

$D_{f_4} = \{ x \in \mathbb{R} ; \arcsin x \neq 0 \text{ et } x \in [-1, 1] \}$

$D_f = [-1, 1] \setminus \{0\}$

continuité

$x \mapsto \arcsin x$ est $\subseteq$ sur $[-1, 1]$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\subseteq$ sur $\mathbb{R}^*$

$x \mapsto \frac{1}{\arcsin x}$ est $\subseteq$ sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

dérivabilité :

$x \mapsto \arcsin x$ est $\subseteq$ sur $] -1, 1[$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ " " " $\mathbb{R}^*$

$x \mapsto \frac{1}{\arcsin x}$ est $\subseteq$ sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$.

et on a $f'_4(x) = \frac{(\arcsin x)'}{(\arcsin x)^2}$

$= \frac{-1}{\arcsin^2(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_4(x)$ est impaire.
dérivabilité en 1

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_4(x) - f_4(1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\arcsin x} - \frac{2}{\pi}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi - 2\arcsin x}{\pi \arcsin x (x - 1)}$$

on pose $y = \arcsin x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\setminus \{0\}$.

$x \rightarrow 1^- \Leftrightarrow y \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-$

$= \lim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\pi - 2y}{\pi y (\sin y - 1)}$

$= \lim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\pi y} \cdot \frac{1}{\frac{\sin(y-1)}{\pi - 2y}}$

$= \lim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{-2}{\pi y} \cdot \frac{1}{\frac{\sin y - 1}{y - \frac{\pi}{2}}} = -\infty$

$\sin'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

f_4 n'est pas $\subseteq$ en $(+1)^-$ de m comme f_4

est impaire f_4 n'est pas $\subseteq$ en $(-1)^+$

Ex 4 :

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{|x| \sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$D_h = \mathbb{R}$

$x \mapsto (x-1)^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ $\subseteq$ sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto |x|$ $\subseteq$ sur $\mathbb{R}^+$

$h(x) = \begin{cases} \frac{|x| |x-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$h(x) = \begin{cases} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -x & \text{si } x \leq 0 \\ x \frac{1-x}{x-1} = -x & 0 < x < 1 \\ x & x > 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

⑥

deriv en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{x} = -1$$

$1 \neq -1$ h n'est pas deriv en 0.

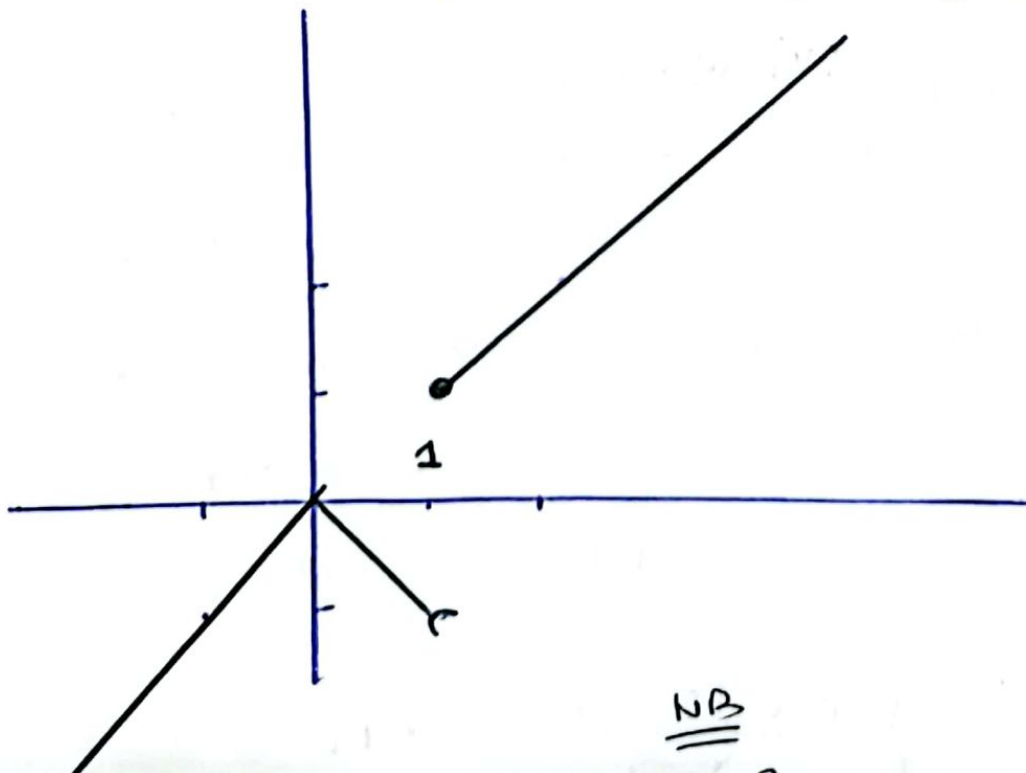
deriv en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x - 1}{x - 1} = +\infty.$$

$$h \text{ n'est pas deriv en } 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

pas deriv en 1.

$$\Rightarrow h'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$



E211

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $f \in C^\infty \text{ sur }]R[\setminus \{-1, 1\}$

$$f(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x) + b(1-x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

$$a+b=1$$

$$a-b=0 \Rightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$$

$$= \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} h$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} g^{(n)} + \frac{1}{2} h^{(n)}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad g'' = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$h(x) = g(-x)$$

$$h'(x) = -g'(-x)$$

$$h''(x) = g''(-x)$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n g^{(n)}(-x)$$

$$h^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}} + \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}}$$

$$\forall x \neq \pm 1$$

(b)

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x^2)^{n+1}} \left[(-1)^n (1-x)^{n+1} (1+x)^{n+1} \right]$$

b) $\cos^3(x)$

$$= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{8} (e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})$$

$$= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 6\cos(x))$$

$$= \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3\cos(x))$$

$f(x) \mapsto \cos^3 x$ admette C^∞ sur R

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{2^n}{2} \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\forall n \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

d) $f(x) = e^x \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k h^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k C_k^i \sin(x + i\frac{\pi}{2}) e^x$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n C_n^k \sin(x + k\frac{\pi}{2}) e^x$$

$$= e^x \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(x + k\frac{\pi}{2}) \right)$$

$$\text{Im} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(x + k\frac{\pi}{2})} \right) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k e^{ix} (e^{i\frac{\pi}{2}})^k \right)$$

$$= e^{ix} \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{i\frac{\pi}{2}})^k$$

$$= e^{ix} (1 + i)^n = e^{ix} (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^n$$

$$= e^{ix} 2^{\frac{n}{2}} e^{in\frac{\pi}{4}}.$$

$$A_n = \operatorname{Im} \left(e^{i(x+n\frac{\pi}{4})} 2^{\frac{n}{2}} \right).$$

$$b^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^{ix} \sin(x + \frac{n\pi}{4}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ex 14:

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$a < b.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{cont sur } [a, b] \\ \text{dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \exists c \in]a, b[\text{ tq } f'(c) = 0.$$

1) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 2 fois dérivable

sur I

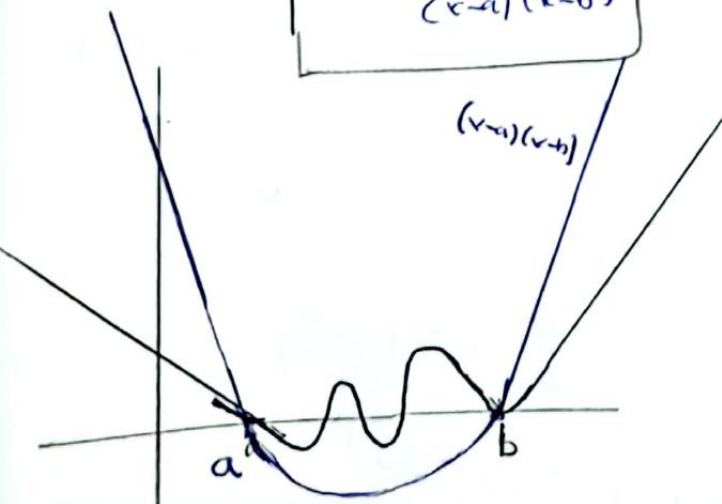
$$\exists M > 0 \text{ tq } |f''(x)| \leq M \quad \forall x \in I.$$

$$a < b \in I, f(a) = f(b) = 0.$$

on fixe $x \in I \setminus \{a, b\}$;

$$g(x) = f(x) - K(x-a)(x-b) \\ g(x) = 0 \text{ car } f(x) = K(x-a)(x-b)$$

$$K = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}$$



f est dérivable sur I .

$$g(a) = g(b) = g(c) = 0 \quad g(a) = f(a) = 0 \\ g(b) = f(b) = 0$$

$$\text{théorème } a < x < b.$$

$[a, x] \subset I$: f est continue et dérivable

sur $[a, x]$ et $g(a) = g(x) = 0$ alors:

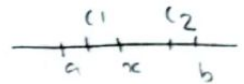
$$\exists c_1 \in]a, x[\text{ tq } g'(c_1) = 0$$

$[x, b] \subset I$: f est continue et

dérivable sur $[x, b]$ et

$$g(x) = g(b) = 0 \text{ alors } \exists c_2 \in]x, b[$$

$$\text{ tq } g'(c_2) = 0$$



*) g' est continue et dérivable sur I .

donc sur $[c_1, c_2]$ alors:

$$\exists c \in]c_1, c_2[\subset I \text{ tq}$$

$$g''(c) = 0.$$

$$(c) \quad \forall x \in I \setminus \{a, b\} \quad \exists c \in I \text{ tq } g''(c) =$$

$$a) \quad g'(x) = f'(x) - K(2x - a - b).$$

$$g''(x) = f''(x) - 2K.$$

$$g''(c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f''(c)}{2}.$$

$$\text{or } K = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{f''(c)}{2} (x-a)(x-b)}$$

$$\forall x \in I \setminus \{a, b\}.$$

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2} |(x-a)(x-b)| \quad \forall x \in I \setminus \{a, b\} \\ \text{ car } |f''(c)| \leq M.$$

$$\text{de plus } f(a) = f(b) = 0$$

$$(a-a)(a-b) = 0$$

$$\text{ et } (b-a)(b-b) = 0.$$

$$\text{ce } |f(x)| \leq \frac{M}{2} |(x-a)(x-b)| \quad \forall x \in I.$$

Ex 9:

1) $\forall x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x} ?$$

$$f'(x) > 0, \quad \forall x > 0$$

$\Rightarrow f$ est strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

soit $x > 0$

$$[a, b] = [x, x+1], f: t \mapsto \ln(t), \quad g'(x) = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \underbrace{(x+1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{1 + \frac{1}{x}} \right] e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

dérivable sur $]0, +\infty[$

f est dérivable sur $[x, x+1]$

$$= \left(\ln(x+1) - \ln(x - \frac{1}{x}) \right) e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})} < 0$$

T.A.F $\Rightarrow \exists c \in]x, x+1[$

$\forall x > 0$

$$f(x+1) - f(x) = (x+1 - x) f'(c)$$

donc

g est strict $\downarrow$

$$\ln(x+1) - \ln(x) = (x+1 - x) \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

$$0 < x < c < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\frac{x}{x+1} < x \ln(1 + \frac{1}{x}) < 1$$

$$e^{\frac{x}{x+1}} < e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} < e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) = 1$$

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

$$g(x) = e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$2) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \forall x > 0$$

$1 + \frac{1}{x} > 0$

$$= e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \text{ est d' sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\ln x \mapsto \text{d' sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto x \text{ est d' sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$1) \Rightarrow \forall x > 0$$

$$1 = \frac{x+1}{x+1} < (x+1) \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{x+1}{x}$$

$$e < e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})} < e^{\frac{x+1}{x}}$$

$\downarrow e$ $\downarrow g(x)$ $\downarrow e^{\frac{x+1}{x}}$

$$f'(x) = \left(x \ln(1 + \frac{1}{x}) \right)' e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \left[\ln(1 + \frac{1}{x}) + x \cdot \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1 + \frac{1}{x}} \right] e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \ln(1+x) - \ln(x) - \frac{1}{1+x} e^{(x+1) \ln(1 + \frac{1}{x})} > 0 \quad \text{d'après (a)} \quad \forall x > 0$$

(*)

$$3) n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$k \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{1}{k+1} \stackrel{(c.r.)}{<} \ln(1+k) - \ln(k) \stackrel{(c.r.)}{<} \frac{1}{k}$$

$$\text{ii)} \sum_{k=1}^n \ln(1+k) - \ln(k) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(n+1) - \ln(1) < S_n}$$

$$\forall n \geq 2$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$\boxed{S_{n-1} < \ln(n) - \ln(1)}$$

$$\boxed{S_n \leq \ln(n+1)}$$

$$n=1 \quad S_1 = 1 \leq 1 + \ln 1$$

$$\forall n \geq 1 \quad \boxed{\ln(n+1) < S_n \leq 1 + \ln(n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

Ex 10:

1) b) en utilisant:

$$e^x = \left[\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot 1 \right] + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c.$$

$n=3$: Taylor-Lagrange pour $\exp$
 $\forall x \in \mathbb{R}$; il existe c entre 0 et x tq:

$$e^x = \sum_{k=0}^3 \frac{x^k}{k!} + \frac{x^4}{4!} e^c$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} e^c$$

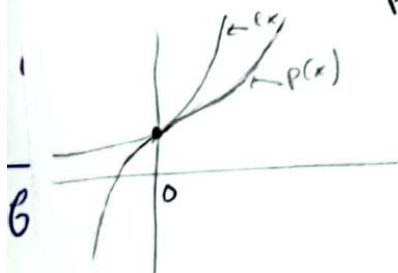
$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{x^4}{4!} e^c > 0$

$$\Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = P(x)$$

ni $x=0 \quad e^0=1 \quad P(0)=1$
 $e^0=1 \geq 1$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$
 $P(x)$



2) a) en utilisant:

$$\beta^{(k)}(c) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \beta^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \beta^{(n+1)}(c).$$

$x \mapsto \cos x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Par (a) $\forall x \geq 0 \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

si $x=0$ (a) est $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq \cos x \leq 1$

$\forall x > 0: \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

si $x > 0$ Taylor Lagrange n.

$$\exists c \in]0, x[\quad \cos x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cos^{(k)}(0)$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos^{(n+1)}(c)$$

pour $n=2 \quad \exists c \in]0, x[$
 $\cos x = 1 + \frac{x}{1!} \cos'(0) + \frac{x^2}{2!} \cos''(0) + \frac{x^3}{6} \cos^{(3)}(c)$
 $\cos'(0) = 0$
 $\cos''(0) = -1$
 $\cos^{(3)}(c) = \sin c$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \cos^{(3)}(c)$$

$$\cos^{(3)}(c) = \sin(c + 3\frac{\pi}{2}) = -\sin c$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin c$$

(sin c)

(on ne sait rien p l'ajout du signe du $\sin c$)

on prend $n=2$.

$\exists d \in]0, x[$ tq

$$\cos x = 1 + \frac{x}{1!} \cos'(0) + \frac{x^2}{2!} \cos''(d)$$

$\cos'(0) = 0$

$$\cos'(x) = -\sin x$$

$$\cos''(x) = -\cos x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \cos(d)$$

$$1 < \cos(d) < 1$$

$$-1 < -\cos(d) < 1$$

$$-\frac{x^2}{2} \leq -\frac{x^2}{2} \cos d \leq \frac{x^2}{2}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq 1 - \frac{x^2}{2} \cos d \leq \cos x$$

$n=2 \quad \exists c \in]0, x[$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6} \sin c$$

$$-\frac{x^3}{6} \leq \frac{x^3}{6} \sin c \leq \frac{x^3}{6} \quad \forall x \geq 0$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin c \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$2) f(x) = \ln(1+x) \text{ est } C^\infty \text{ sur } I =]-1, +\infty[.$$

$$0 \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\forall x \in I, x \neq 0$$

$$\exists c \text{ entre } 0 \text{ et } x$$

$$\text{tg } f(x) = \ln(1+x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\text{or } f = \ln(1+x) \\ f^{(k)}(x) = \frac{-1 \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots (k-k+1)}{(1+x)^k} \quad \forall k \geq 1$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} (-1)^{k-1} (k-1)!$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}$$

$$\forall x > -1 \neq 0 \quad \exists c \text{ entre } 0 \text{ et } x.$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}} \cdot \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}$$

$$\text{pour } x=1 \quad \exists c \in]0, 1[.$$

$$\text{tg } f(1) = \ln(2) = \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}}_{S_n} + \underbrace{\frac{1}{n+1} \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}}_{R_n}$$

$$|R_n| = \frac{1}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{car } 1+c > 1$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n]{\quad} \ln 2$$

3) question auxiliaire: $\forall m \in \mathbb{N}$

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad u_n \xrightarrow[n]{\quad} e?$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ entre } 0 \text{ et } x$$

$$x=1$$

$$e = u_n + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}}_{R_n} \quad c \in]0, 1[.$$

$$0 < R_n < \frac{e}{(n+1)!}$$

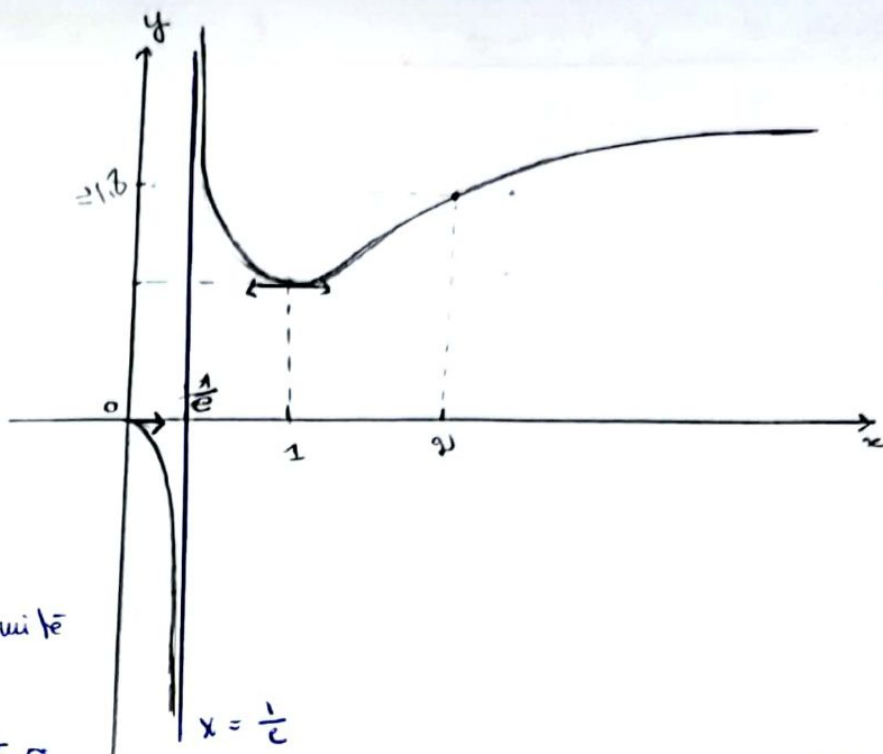
$$R_n \rightarrow 0 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n]{\quad} e.$$

Ex 13 :

$$1) f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R}; x > 0 \text{ et } 1 + \ln x \neq 0\}$$

$$=]0, +\infty[\setminus \{e^{-1}\}$$



$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + \ln x} = 0$$

$\rightarrow f$ est prolongeable par continuité en 0 et $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \ln x} = 0$$

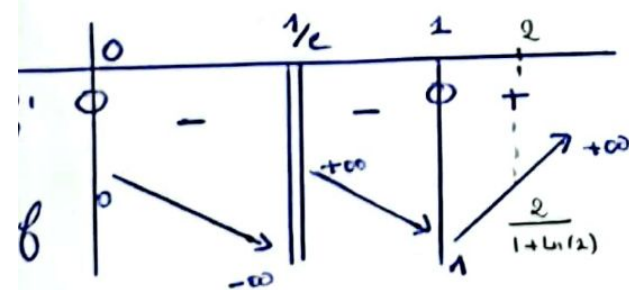
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

$$3) \forall x \in Df: x > 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{e}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \ln x} = 0$$

$$3) x? \text{ tq } f(x) = x \text{ avec } x \in]0, +\infty[\setminus \{\frac{1}{e}\}.$$

$$f(0) = 0 \rightarrow 0 \text{ est un pt fixe de } f.$$

pour $x \neq 0$

$$\frac{x}{1 + \ln x} = x \Leftrightarrow 1 + \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

les pts fixes sont 0 et 1.

$$4) \begin{cases} x_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}; x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

$$I = [1, +\infty[\quad f(I) = [1, +\infty[= I$$

et $2 \in I$.

$(x_n)_n$ est bien définie et $\forall x \geq 0$

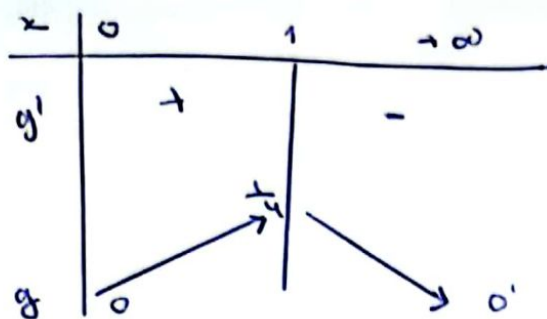
$$\boxed{x_n \geq 1}$$

But est clémq $f'(x) < \frac{1}{4}$. on introduit

$$g(x) = \frac{x}{(x+1)^2} \text{ ni forme}$$

$$5/a) g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}, x \geq 0$$

$$g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) \cdot x}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$



$$\forall x > 0 \quad 0 < g(x) \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{or } f'(x) = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2} = g(\ln x)$$

$$\forall x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \ln x \geq 0$$

$$0 \leq g(\ln x) \leq \frac{1}{4}; \quad \forall x \geq 1$$

$$\text{donc } \forall x \geq 1 \quad \boxed{0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}}$$

Après l'inégalité du TAF:

$$n \in \mathbb{I} = [1, +\infty[$$

$$x_n \in \mathbb{I}$$

$$h = \frac{1}{4} \quad f \text{ est sur } \mathbb{I}$$

$$|f(x_n) - f(1)| \leq \frac{1}{4} |x_n - 1|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4} |x_n - 1|$$

$$\text{Pq } \boxed{|x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}} ?$$

Par récurrence:

pour $n=0$:

$$|x_0 - 1| = |2 - 1| = 1 \leq \frac{1}{4^0} = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que

$$|x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$$

$$\text{et } \text{Pq } |x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$\text{or on a } |x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4} |x_n - 1| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$\text{cl } \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - 1| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$c) \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_n x_n = 1$$

calculons limite de $(x_n)_n$
ou bien: en utilisant Thm des suites récurrentes
si 3 questions)

$$x_0 = 2 \in \mathbb{I} [1, +\infty[\quad (x_n)_n \subset [1, +\infty[$$

$$f(\mathbb{I}) \subset \mathbb{I}$$

$$f \text{ est croissante } x_1 - x_0 = f(2) - 2$$

$$x_n \xrightarrow[n]{} x_0$$

$$= \frac{2}{1+\ln 2} - 2 < 0$$

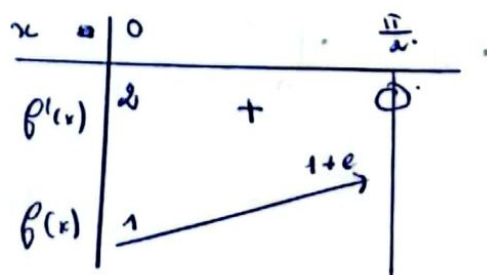
$$(x_n)_n \text{ décroissante et } (x_n)_n \text{ minorée par } 1 \Rightarrow (x_n)_n \text{ CV}$$

$$\begin{aligned} & \text{NB } f \text{ cont sur } \mathbb{I} \\ & \left. \begin{aligned} & x_n \xrightarrow[n]{} \ell \\ & \text{un pt fixe} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\ell) = \ell \text{ et } \ell \geq 1 \\ & \Rightarrow \boxed{\ell = 1} \end{aligned}$$

Ex 12:

$$1) f(x) = e^{\sin x} \quad \sin x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cdot e^{\sin x} + \cos x \\ &= \underbrace{\cos x}_{>0} \underbrace{(1 + e^{\sin x})}_{>0} \end{aligned}$$



f est continue strictement
croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}] = I$.
donc bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur
 $[1, 1+e] = J$.

$f^{-1}: [1, 1+e] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$ cont strict
sur $[1, 1+e]$.

a) f^{-1} est dérivable sur $[1, 1+e[$
car $f^{-1}(1+e) = \frac{\pi}{2}$ et $f'(\frac{\pi}{2}) \neq 0$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \forall x \in [1, 1+e[$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))(1+e^{\sin(f^{-1}(x))})} g(x)$$

f est C^∞ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow f^{-1}$ est C^∞ sur $[1, 1+e[$.

si f est simple pas
et f est C^∞ donc
 f^{-1} est C^∞

$$= \frac{1}{8}$$

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(1) + (x-1)(f^{-1})'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} (f^{-1})''(1) + \frac{(x-1)^3}{6} (f^{-1})'''(c)$$

$$= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{6} (f^{-1})'''(c)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$\forall x \in]1, 1+e[\exists c \in]1, x[$

$$4) f^{-1}(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{(x-1)^k}{k!} (f^{-1})^{(k)}(1) + \frac{(x-1)^3}{6} (f^{-1})'''(c) = -\frac{1}{16} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)^3 (f^{-1})'''(c)}{6 (x-1)^2}$$

on a $f^{-1}(1) = 0$

$$(f^{-1})''(1) = \frac{1}{\cos(f^{-1}(1))(1+e^{\sin(f^{-1}(1))})} = \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{1}{(\frac{x-1}{x-1})^2} + \frac{(x-1) (f^{-1})'''(c)}{6 (\frac{x-1}{x-1})^2}$$

$$\stackrel{V}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1} = 1$$

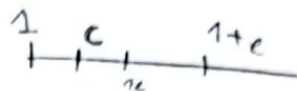
(10)

$$\frac{f^{-1}(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2} + \frac{(x-1)}{6} \cdot \frac{(f^{-1})^{(3)}(c)}{\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2}$$

$\downarrow 1$ $\downarrow 1$
 $\downarrow 0$

$$= \boxed{-\frac{1}{16}}$$



$$1 \leq x < 1+e.$$

$$1 < c < x < 1+e.$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$\Rightarrow c \rightarrow 1^+.$$

$$\text{Soit } f = (f^{-1})^{(3)} \text{ est cont. sur } [1, 1+e].$$

$$\Rightarrow (f^{-1})^{(3)}(c) \xrightarrow{c \rightarrow 1^+} (f^{-1})^{(3)}(1) \in \mathbb{R} \neq \infty$$

$$= \underline{f(c)}.$$

Série n°3- Exercice 8 (Corrigé)

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \geq 0 \text{ et } -1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1\}$.
 Or pour tout $x \in [-1, 1]$, on a: $-1 \leq 2x\sqrt{1-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 4x^2(1-x^2) \leq 1 \Leftrightarrow (2x^2-1)^2 \geq 0$, et $1-x^2 \geq 0$, d'où $D_f = [-1, 1]$.
 De plus, les fonctions $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ sont continues sur $[-1, 1]$ donc f est aussi continue sur $[-1, 1]$.
 Les fonctions $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ sont dérivables sur $] -1, 1[$, donc f est dérivable en tout point x de D_f tel que: $1-x^2 \neq 0$ et $2x\sqrt{1-x^2} \neq \pm 1$.
 Or, $2x\sqrt{1-x^2} \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc f est dérivable sur $] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$.

2. (a) Pour tout $x \in] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[\cup] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$, on a:

$$f'(x) = (2x\sqrt{1-x^2})' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}|2x^2-1|}$$

D'où, si $x \in] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$,
 et si $x \in] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$, $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$.

- (b) f est continue sur $[-1, 1]$ donc on a:

$$f(x) = \begin{cases} -2 \arcsin x + c_1, & \text{si } x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\\ 2 \arcsin x + c_2, & \text{si } x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \\ -2 \arcsin x + c_3, & \text{si } x \in] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \end{cases}$$

Or $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$, d'où $c_1 = -\pi$, $c_2 = 0$ et $c_3 = \pi$.

3. La fonction $\theta \mapsto \sin \theta$ est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$, donc pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $x = \sin \theta$ et on a

$$f(x) = f(\sin \theta) = \arcsin(2 \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}) = \arcsin(\sin 2\theta)$$

- Si $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow 2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, d'où:

$$f(x) = 2\theta = 2 \arcsin x.$$

- Si $x \in] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \Leftrightarrow \theta \in] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow 2\theta \in] \frac{\pi}{2}, \pi] \Leftrightarrow \pi - 2\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Or $\sin 2\theta = \sin(\pi - 2\theta)$, donc

$$f(x) = \arcsin \sin(\pi - 2\theta) = \pi - 2\theta = \pi - 2 \arcsin x$$

- Si $x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \Leftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow 2\theta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow -\pi - 2\theta \in] -\frac{\pi}{2}, 0]$. Or $\sin 2\theta = \sin(-\pi - 2\theta)$, donc

$$f(x) = \arcsin \sin(-\pi - 2\theta) = -\pi - 2\theta = -\pi - 2 \arcsin x$$

Remarque: pour $x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[$, on pouvait aussi utiliser le fait que f est impaire pour trouver l'expression simplifiée de la fonction f .