

|                      |                      |                     |
|----------------------|----------------------|---------------------|
| Niveau : LCS1 & LCE1 |                      | Matière : Analyse 1 |
| Date : Décembre 2025 | Devoir de maison n°1 |                     |

**Exercice 1** Dans cet exercice, on va démontrer l'égalité ci-dessous de deux manières différentes

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1). \quad (1)$$

**Première méthode :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1).$$

1. Justifier que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ .
2. Dédire la formule (1), pour tout  $x \in [0, 1]$ .

**Deuxième méthode :** 1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $2 \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. Pour tout  $x \in [0, 1]$ , simplifier l'expression  $\sin\left(2 \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}\right)$ .
3. Dédire la formule (1), pour tout  $x \in [0, 1]$ .

**Troisième méthode :** 1. Déterminer un intervalle  $I$  sur lequel la fonction  $x \mapsto \sin^2 x$  soit une bijection de  $I$  sur  $[0, 1]$ .

2. En posant  $x = \sin^2 t$ , pour  $t \in I$ , calculer  $\arcsin(\sqrt{x})$  et  $\frac{1}{2} \arcsin(2x - 1)$  en fonction de la variable  $t$ .
3. Dédire la formule (1)

**Exercice 2** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$ .

1. Montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(t)}{t} = 1$ .
2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\ln\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).$$

(**Indication :** On pourra utiliser le fait que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{th}(2a) = \frac{2\operatorname{th}a}{1 + \operatorname{th}^2a}$ .)

3. En déduire que pour tout  $x > 0$ , et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n(x) = \ln\left(2^n \operatorname{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\operatorname{th}(x)).$$

4. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  fixé. Déterminer la limite de la suite  $(S_n(x))_n$ .

**Exercice 3** Soit  $(u_n)_n$  **une suite bornée** vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $2u_{n+1} \leq u_n + u_{n+2}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

1. Montrer que  $(v_n)_n$  est croissante et qu'elle converge vers un réel  $\ell$ .
2. On veut montrer que  $\ell = 0$ .
  - (a) On suppose que  $\ell > 0$ .
    - i. Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0; \sum_{k=n_0}^n v_k \geq \sum_{k=n_0}^n \frac{\ell}{2}.$$

- ii. Etablir que

$$\forall n \geq n_0; u_{n+1} - u_{n_0} \geq \frac{n - n_0 + 1}{2} \ell.$$

- iii. Dédire que  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$ .

- (b) On suppose maintenant que  $\ell < 0$ .

- i. Montrer qu'il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_1; u_{n+1} - u_{n_1} \leq \frac{n - n_1 + 1}{2} \ell.$$

- ii. Dédire que  $(u_n)_n$  tend vers  $-\infty$ .

- (c) Conclure.

3. Montrer que  $(u_n)_n$  est décroissante

**Exercice 4** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, & \text{si } x > 0; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue en 0.
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(x) \cdot \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right].$$

3. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0?
4. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que pour tout  $x > 0$ , on a

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire la monotonie de  $f$ .

5. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et vérifier que  $f([0, e]) \subset [0, e]$ .
6. Dédire que  $f$  possède un point fixe.

**Exercice 5** On considère la suite  $(u_n)_n$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{8}$ .  
 (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \exp\left(1 - \frac{1}{8n}\right)$ .  
 (c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \exp\left(-\frac{1}{8n}\right)$ .  
 (d) Dédire que  $(u_n)_n$  converge.
2. (a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n \leq \exp\left(-1 - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)\right)$ .  
 (b) En utilisant l'inégalité  $\ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$ , pour  $n \geq 2$ , montrer que

$$\forall n \geq 2, u_n \leq \exp\left(-1 - \frac{\ln n}{8}\right).$$

- (c) En déduire que  $\frac{n^n}{n!} = o(e^n)$ .

**Exercice 6** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f(0) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $x \in [0, 1]$ ;  $|f''(x)| \leq M$ .
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction  $f$ , montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f'(0)x - \frac{M}{2}x^2 \leq f(x) \leq f'(0)x + \frac{M}{2}x^2.$$

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{n+1}{2n}f'(0) - M\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n+1}{2n}f'(0) + M\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}.$$

(On rappelle que  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .)

4. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  est convergente.
5. Application : Déterminer les limites des suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  définies par

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right).$$