

SÉRIE 3 : ANALYSE 1 Continuité-Dérivabilité

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes, si elles existent

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2}, \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}, \\ 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\ln x)}{x}, \quad 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\sin x}, a > 0 \text{ et } a \neq 1, \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{x+1} - x}{\ln(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Trouver un équivalent pour la fonction f suivante au voisinage du point x_0 puis en déduire sa limite dans chaque cas.

$$(a) f(x) = \frac{x+3}{(x^2+1)(x-2)}, (x_0 = +\infty), \quad (b) f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x+1}}, (x_0 = -1)$$

$$(c) f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sqrt{x^2+x-2}}, (x_0 = -2), \quad (d) f(x) = \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+2x^4}, (x_0 = 0).$$

2. (a) Montrer que $\ln(\ln x) \underset{(+\infty)}{=} o(\ln x)$.

$$(b) \text{ En déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 3

1. Soit $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \right)$. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$.

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - 1) \ln x$.

3. Soit $g(x) = \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x - 1 \right] \ln x$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Exercice 4 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1. f : x \mapsto x + \sqrt{x - E(x)}, \quad 2. f : x \mapsto E(x) \sin \pi x, \\ 3. f : x \mapsto 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right), D = \mathbb{R}_+^*, \quad 4. f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 5 Déterminer les domaines de continuité et de dérivabilité ainsi que la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1. f_1(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad 2. f_2(x) = \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) \\ 3. f_3(x) = \frac{1}{\arcsin x} \quad 4. f_4(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \end{aligned}$$

Exercice 6

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. Montrer que les fonctions f et g définies par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ sont monotones sur $]0, +\infty[$. Quelle est leur limite en $+\infty$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\ln(1+n) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$

Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?

Exercice 7 On considère la fonction $f(x) = \exp(\sin x) + \sin x$.

1. Montrer que f définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle qu'on déterminera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.
2. Déterminer le domaine sur lequel f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange qu'il existe c entre 1 et x tel que

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{16}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3!} (f^{-1})^{(3)}(c).$$

4. Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x) - \frac{1}{2}(x-1)}{(\ln x)^2}$.

Exercice 8 Déterminer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. f(x) = \frac{1}{1-x^2}, & 2. f(x) = \cos^3 x, \\ 3. f(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}, & 4. f(x) = e^x \sin x. \end{array}$$

Exercice 9

1. Établir les inégalités suivantes :

$$(a) \text{ Pour tout } x \geq 0, x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{24}.$$

$$(b) \text{ Pour tout } x \geq 0, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}.$$

2. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$,

$$\text{montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2.$$