

SERIE 1 : ANALYSE 1

Fonctions usuelles

Exercice 1 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad g : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad h : x \mapsto \begin{cases} x \ln \frac{x^2 + 1}{x}, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 Montrer que la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + \exp(x - 1) + \ln x$ est bijective et donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point $(0, f^{-1}(0))$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f .
4. Montrer que f réalise une bijection de $[-1; 1]$ sur un intervalle $[a; b]$ que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
5. Vérifier que f^{-1} est dérivable sur $]a; b[$. Est-elle dérivable en a ? en b ?
6. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $-\frac{2}{3}$.

Exercice 4

1. Simplifier les expressions suivantes lorsqu'elles ont un sens.
 - (a) $\arcsin\left(\sin\frac{17\pi}{6}\right), \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right), \arcsin\left(\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right)\right).$
 - (b) $\cos(2 \arctan x), \cos^2\left(\frac{\arcsin x}{2}\right), \ln\left(\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}\right).$
 - (c) $\theta = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$ (vérifier que $\tan \theta = 1$).
2. Vérifier les égalités suivantes :
 - (a) $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{3}{8}\right).$
 - (b) $\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{82}}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right) = \frac{\pi}{4}.$

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arccos(\cos(x)) + \arcsin(\cos(2x)).$$

1. Étudier la périodicité et la parité de f .
2. Déterminer l'expression simplifiée de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f(x) = 3x - \frac{3\pi}{2}$.
4. Tracer la courbe de f sur $[-\pi, 3\pi]$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\arcsin x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.
2. $\arcsin x + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. $\arccos x = \arcsin(2x)$.
4. $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan(x)$.
5. $\arcsin(2x) = \arctan x$.

Exercice 7

1. Prouver que $x = 1$ est une solution de l'équation

$$\arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}, \quad (*)$$

puis résoudre l'équation (*).

2. Calculer $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \ln 3\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \ln 3\right)$. Puis, à l'aide de la formule $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$, déterminer les solutions de l'équation

$$2 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \sqrt{3} \operatorname{ch}(5x).$$

Exercice 8

1. Prouver que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}.$$

2. Prouver que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arcsin x = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x-1)$.

Exercice 9 On pose $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) + \arccos(\operatorname{th} x)$.

1. Donner le domaine de définition et de dérivabilité de f .
2. Montrer que f' est nulle sur son domaine de dérivabilité.
3. Montrer que $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 On pose

$$f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

1. Justifier que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -g(x).$$