

Chapitre I: Analyse

I. Limites:

Déf: Soit $l \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ (avec $I \cap \mathbb{R}(a)$)

On dit que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 \text{ tq } \forall x \in I \setminus \{a\} : |x - a| < \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

avec :

$$x \in]a - \beta, a + \beta[\setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

$\Rightarrow$ On peut dire que f est bornée au v(a)

Déf: On dit que f tend vers $+\infty$ au v(a) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \beta > 0 \text{ tq } \forall x \in I \setminus \{a\} : |x - a| < \beta \Rightarrow f(x) > M$$

avec :

$$x \in]a - \beta, a + \beta[\Rightarrow f(x) \in]M, +\infty[$$

Déf: On dit que f tend vers $-\infty$ au v(a) :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\forall M < 0, \exists \beta > 0 \text{ tq } \forall x \in I \setminus \{a\} : |x - a| < \beta \Rightarrow f(x) < M$$

Déf: On dit que f tend vers l au v(+ ∞) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tq } \forall x \in I : x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Déf: (suites)

$a, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, I est un v(a) tq f est déf sur I :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f = l \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset I \text{ tq } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

• si $\exists (x_n)$ dans I tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et tq $f(x_n)$ n'admet pas de limite alors f n'admet pas de limite au pt a.

• si $\exists$ deux suites (x_n) et (y_n) tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ et tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$ $\Rightarrow$ n'admet pas de limite

II. Relations de Comparaison :

Déf: On dit que g est négligeable devant f au v(x) :

$$\text{ssi } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

$\Rightarrow \exists$ une fct $\varepsilon \mapsto 0$ $x \mapsto x_0$ tq $g(x) = f(x) \cdot \varepsilon(x)$

• On note $g \ll f$ ou $g = o(f)$

Propriété :

$$\left. \begin{array}{l} g = o(f) \\ h = o(f) \end{array} \right\} \begin{array}{l} g + h = o(f) \\ (h o f) = o(f) \end{array} ; o(o(f)) = o(f)$$

$$o(f_1) \cdot o(f_2) = o(f_1 \cdot f_2)$$

$$g_x = o(f) \rightarrow \frac{1}{f} = o\left(\frac{1}{g}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} (f_2)_b = o(f_1) \\ g \xrightarrow{x \rightarrow a} b \end{array} \right\} \rightarrow (f_2 \circ g)_a = o(f_1 \circ g)$$

Déf: On dit que f est équivalente à g au v(x) :

$$\text{ssi } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$\Rightarrow \exists$ une fct $\lambda \mapsto 1$ $x \mapsto x_0$ tq $f(x) = \lambda(x) \cdot g(x)$

• On note $f \sim g$

Propriétés :

$$\lim_{x_0} f = l \neq 0 \rightarrow f \sim l$$

$$\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ \lim_{x_0} g = l \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x_0} f = l \quad \text{La réciproque est fautive}$$

$$f + o(f) \sim f$$

$$f \sim g \rightarrow f \text{ et } g \text{ sont de m\^eme signe au v(x_0)}$$

• f monotone $\nrightarrow g$ est monotone

• si f ne s'annule pas au v(x_0) $\rightarrow$ m\^eme pour g

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{array} \right\} \rightarrow f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x_0} f = y_0 \\ f_1 \sim f_2 \end{array} \right\} \rightarrow f_1 \circ g \sim f_2 \circ g$$

$$\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ g > 0 \text{ au v(x_0)} \end{array} \right\} \forall r \in \mathbb{R} \rightarrow f^r \sim g^r$$



$$\left. \begin{array}{l} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{array} \right\} \rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$$

• f_1 et f_2 sont de m\^eme signe au v(x_0)

$$\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ g \xrightarrow{x_0} \infty \end{array} \right\} \rightarrow e^f \sim e^g$$

$$\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ f > 0 \text{ et } f \xrightarrow{x_0} 1 \end{array} \right\} \rightarrow \ln f \sim \ln g$$

$$\text{Si } f(x) \sim g(x)$$

$$\nrightarrow f(x) + c \sim g(x) + c$$

Fonction usuelles:

Si f d en x_0 et $f(x_0) \neq 0$ Alors $f(x) - f(x_0) \sim (x - x_0) f'(x_0)$

Si $u(x) \rightarrow 0$ Alors :

- $\sin(u(x)) \sim u(x)$
- $\tan(u(x)) \sim u(x)$
- $\cos(u(x)) - 1 \sim -\frac{u(x)^2}{2}$
- $(1 + u(x))^\alpha \sim 1 + \alpha u(x)$ $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$
- $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$
- $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$; $a_0 \neq 0$
 $P \sim a_n x^n$; $P \sim a_0$

Propriété:

- f et g sont $e^n \rightarrow (f+g)$ est e^n
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
- Si f et g sont $e^n \rightarrow$ Alors $(f \circ g)$ est e^n

Formule de Leibniz

4) f et g sont $e^n \rightarrow$ Alors $(f \cdot g)$ est e^n :

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Théorème des accroissements finis généralisé

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\in$ sur $[a, b]$, d sur $]a, b[$

Si g' ne s'annule pas sur $]a, b[$:

$$\text{Alors } \exists c \in]a, b[\text{ tq } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Règle de l'Hôpital

Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\in$ sur $[a, b]$ et d sur $]a, b[$

Si $\forall x \neq x_0$: $g(x) \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ $\in \mathbb{R}$

Alors $\exists c$ entre x et x_0 : $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \rightarrow l$

III. Continuité :

- f est c en $x_0 \rightarrow \forall (u_n)_n \subset I$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(x_0)$
- Soit f def sur $I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
 $\rightarrow f$ est prolongeable par continuité au pt x_0
 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq x_0 \\ l & ; x = x_0 \end{cases}$

Théorème de Rolle :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tq $a < b \in \mathbb{R}$

- Si :
- $f \in$ sur $[a, b]$
 - f d sur $]a, b[$
 - $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ Alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis : TAF

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tq $a < b \in \mathbb{R}$

- Si :
- f est c sur $[a, b]$
 - f est d sur $]a, b[$

$\Rightarrow$ Alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Théorème d'Inégalité des accroissements finis : DIA

1) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ d :

Si $\exists M \geq 0$ tq $|f'| \leq M$

Alors $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Exemple : $|\cos(x)| \leq 1 \Rightarrow |\sin(x)| \leq |x|$

2) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\in$ sur $]a, b[$ et $\in$ sur $[a, b]$
 Si $|f'(x)| \leq g'(x)$ Alors $|f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a)$

Remarque (Équivalent)

$$\arccos(u(x)) \sim \sin(\arccos(u(x))) \quad (\text{il faut qu'il y ait la limite en } x_0)$$

$$\sim \sqrt{1 - u(x)^2}$$

- Si l'ensemble $\text{Maj}(A)$ des majorants de A dans E admet un plus petit élément M : borne sup de A dans E . $\text{Sup}(A)$
- Si l'ensemble $\text{Min}(A)$ des mineurs de A admet un plus grand élément m : borne inf de A dans E . $\text{Inf}(A)$

- Rq :
- $M = \text{Sup}(A) \Rightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \alpha \in E, (\forall a \in A, a \leq \alpha) \Rightarrow M \leq \alpha \end{cases}$
 - $\text{Sup}(A)$ et $\text{Inf}(A)$: peut ne pas $\in A$
 - Une partie peut avoir ou non de plus grand élément
 " peut ne pas avoir d'élé max ou en avoir un ou plus
 - Si $(E, \leq)$ est totale $\Rightarrow E$ admet au plus un élé max qui est aussi le plus grand élément.
 - $\text{Sup}(E)$ est le + petit élé de E (si $\exists$)
 $\text{Inf}(E)$ est le + grand élé de E (si $\exists$)

Remarque :

- on peut utiliser l'autre
- Si $|f'| \leq g'$ et $f(a) = g(a)$ Alors $f(x) \leq g(x)$

Théorème des valeurs Intermédiaires : TVI

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue
 $a, b \in I$; $f(a) < f(b)$

Alors $\forall \lambda \in [f(a), f(b)]$, $\exists c$ entre a et b tq $\lambda = f(c)$

Si $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c$ entre a et b tq $f(c) = 0$

IV. Derivabilité :

Tangente : $\Delta : y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$

Dérivées Successives :

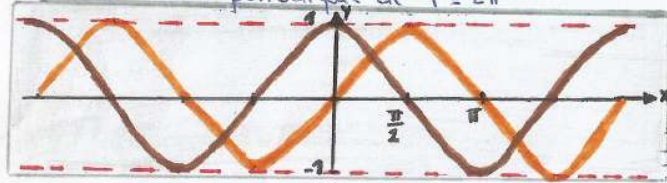
f est de classe e^n sur I si $f^{(n)}$ existe et $\in$ sur I
 e^∞ " " si " " $\forall n \in \mathbb{N}$

I. Fonctions Circulaires :

Fonction cos et sin :

impair : sin
pair : cos

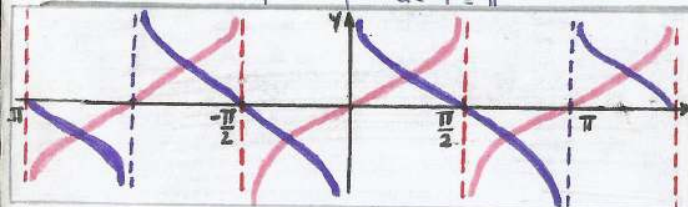
- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- cos et sin sont périodiques de $T = 2\pi$



- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\sin x)' = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(-x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$; $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$; $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$
- sin et cos sont $\mathcal{C}^\infty$
- $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$; $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

Fonction tan et cotan :

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- cotan et tan sont périodiques de $T = \pi$



- tan x et cotan x sont $\mathcal{C}^\infty$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(\cotan x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cotan^2 x)$

- $\tan(-x) = \tan(\pi - x) = -\tan x$
- $\cotan(-x) = \cotan(\pi - x) = -\cotan x$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cotan x$; $\cotan(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cotan x$; $\cotan(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x$

Formule d'addition :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Somme et produit :

- $\cos a + \cos b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin(\frac{a+b}{2}) \sin(\frac{a-b}{2})$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin(\frac{a+b}{2}) \cos(\frac{a-b}{2})$
- $\sin a - \sin b = 2 \sin(\frac{a-b}{2}) \cos(\frac{a+b}{2})$
- $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$
- $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Formule de duplication :

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Produit en somme :

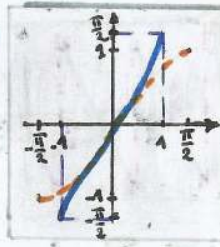
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

II. Fonctions Circulaires Réciproques :

Arcsin :

sin : orange
Arcsin : bleu

- $\forall x \in [-1, 1], \text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Arcsin est impaire
- $\sin \circ \text{Arcsin}(x) = x, \forall x \in [-1, 1]$
- $\text{Arcsin} \circ \sin(x) = x, \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Arcsin est d sur $] -1, 1 [$:



$$\text{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Arcsin}(x) \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \text{Arcsin} \circ \sin(x)$; f est périodique, impaire et π -périodique

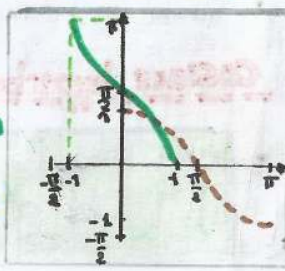


$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Arccos :

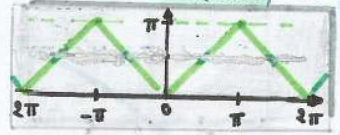
cos : vert
Arccos : vert foncé

- $\forall x \in [-1, 1], \text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$
- $\cos \circ \text{Arccos}(x) = x, \forall x \in [-1, 1]$
- Arccos n'est ni paire ni impaire :
 $\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$
- Arccos(x) est d sur $] -1, 1 [$:



$$\text{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Arccos}(x) \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty$$

- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \text{Arccos}(\cos x)$; g est périodique, paire et π -périodique



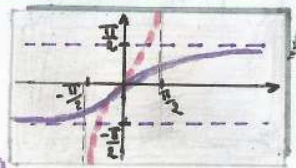
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\forall x \in [-1, 1]; \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Arctan :

tan : orange
Arctan : bleu

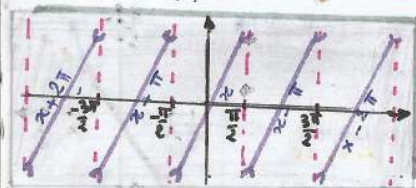
- $\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(x) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$
- Arctan est impaire
- $\tan \circ \text{Arctan}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- Arctan(x) est d sur $\mathbb{R}$:



$$\text{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$\mathbb{R} : x \mapsto \text{Arctan}(\tan x)$ def $\mathbb{R} : [\frac{\pi}{2} + k\pi]$

π périodique, impaire $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \text{Arctan}(x) = x$



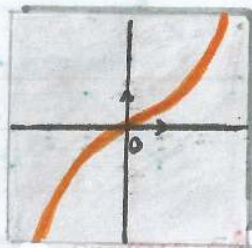
Si $x > 0$;
 $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$
 Si $x < 0$;
 $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

III. Fonctions hyperboliques:

Sinus hyperbolique:

$\text{Sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

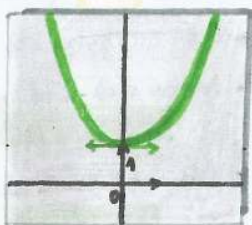
Sh est une fct impaire et $\uparrow$



Cosinus hyperbolique:

$\text{Ch} : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$
 $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

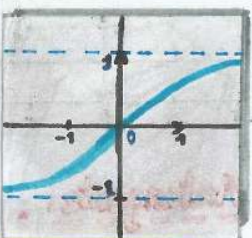
Ch est une fct paire et $\uparrow$ pour $x > 0$



Tangente hyperbolique:

$\text{Th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$
 $x \mapsto \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Th croit de -1 à 1
 Th est impaire



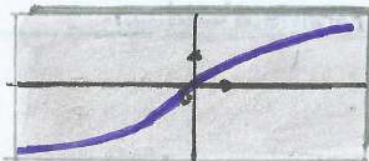
$\bullet \text{Ch } x + \text{Sh } x = e^x$
 $\bullet \text{Ch } x - \text{Sh } x = e^{-x}$
 $\bullet \text{Ch } x \cdot \text{Sh } x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\bullet \text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$
 $\bullet 1 - \text{Th}^2 = \frac{1}{\text{Ch}^2} = (\text{Th } x)'$
 $\bullet (\text{Ch } x)' = \text{Sh } x$
 $\bullet (\text{Sh } x)' = \text{Ch } x$

IV. Fonctions hyperboliques Réciproques

Argsh:

$\text{ArgSh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- fct impaire
- de classe C^∞
- strict $\uparrow$



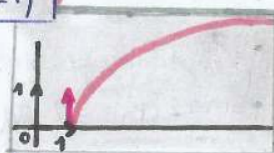
- $\forall x \in \mathbb{R} , \text{Argsh}(\text{sh } x) = x$
- $\forall y \in \mathbb{R} , \text{sh}(\text{Argsh } y) = y$
- Argsh est d sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$

$\text{Argsh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

Argch:

$\text{Argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$
 $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

- de classe C^∞
- Strict $\uparrow$



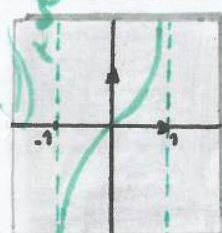
- $\forall y \in [1, +\infty[, \text{ch}(\text{argch } y) = y$
- $\forall x \in [0, +\infty[, \text{argch}(\text{ch } x) = x$
- Argch est d sur $]1, +\infty[$ et $\forall y \in]1, +\infty[$

$\text{Argch}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$

Argth:

$\text{Argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

- fct impaire
- de classe C^∞ sur $] -1, 1[$
- croit $\uparrow$



Argth est d sur $] -1, 1[$ et $\forall y \in] -1, 1[$

$\text{Argth}' y = \frac{1}{1-y^2}$

*** Formules d'addition**

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$
$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$	$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$

*** Transformation de sommes en produits**

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$	$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$
$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$	$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$	$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$
$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$	$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$
$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$	$\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \cdot \operatorname{ch} q}$
$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$	$\operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \cdot \operatorname{ch} q}$

*** Formules de duplication**

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 a$ $= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$	$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 2 \operatorname{ch}^2 a - 1$ $= 2 \operatorname{sh}^2 a + 1$ $= \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$	$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$
$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$	$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$

*** Transformation de produits en sommes**

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$	$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)]$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	$\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)]$
$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)]$

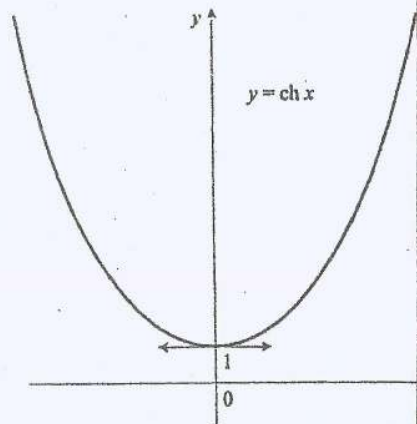
Fonctions hyperboliques

Fonction cosinus hyperbolique

Le cosinus hyperbolique $x \rightarrow \text{ch } x$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

C'est une fonction paire, croissante pour $x > 0$.



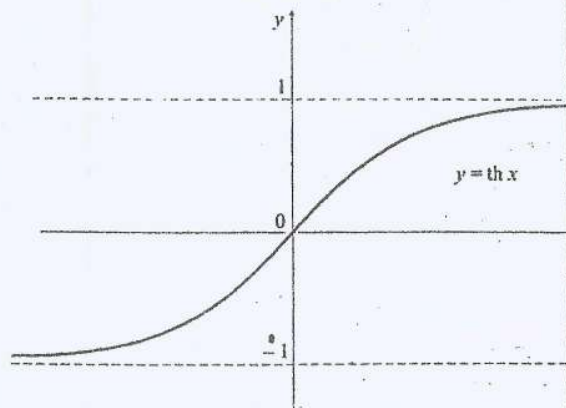
Fonction tangente hyperbolique

La tangente hyperbolique $x \rightarrow \text{th } x$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$$

elle croît de -1 à 1 .



On a les relations suivantes :

$$\text{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \text{th}^2 x}, \quad \text{sh}^2 x = \frac{\text{th}^2 x}{1 - \text{th}^2 x}$$

Fonction sinus hyperbolique

Le sinus hyperbolique $x \rightarrow \text{sh } x$ est défini par :

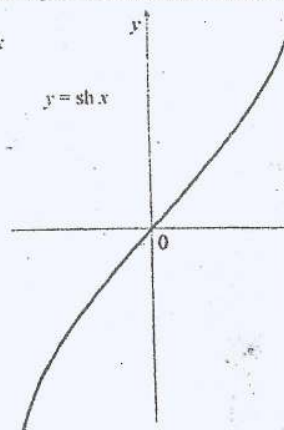
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

C'est une fonction impaire et croissante.

On a les relations suivantes :

- $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$
- $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$
- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$
- $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{ch } x + \text{sh } x)^\alpha = e^{\alpha x}, \quad (\text{ch } x - \text{sh } x)^\alpha = e^{-\alpha x}$$



Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

Fonction Argch

La fonction $x \rightarrow \text{Argch } x$ est définie, pour $x \geq 1$, par :

$$y = \text{Argch } x \iff x = \text{ch } y \quad \text{et} \quad y \geq 0$$

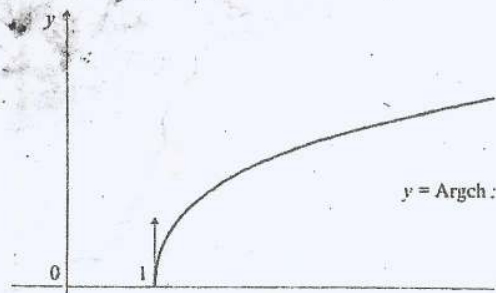
$\text{Argch } x$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

On a aussi :

$$\text{Argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$(\text{Argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Elle croît de 0 à $+\infty$.



Fonction Argsh

La fonction $x \rightarrow \text{Argsh } x$ est définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$y = \text{Argsh } x \iff x = \text{sh } y$$

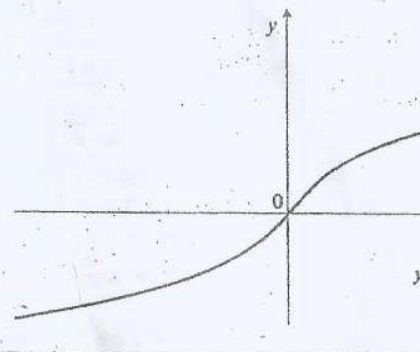
C'est une fonction impaire, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a aussi :

$$\text{Argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(\text{Argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Elle croît de $-\infty$ à $+\infty$.



Fonction Argh

La fonction $x \rightarrow \text{Argh } x$ est définie, pour $x \in]-1, 1[$, par :

$$y = \text{Argh } x \iff x = \text{th } y$$

C'est une fonction impaire vérifiant :

$$\text{Argh } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Elle est de classe C^∞ sur $] -1, +1[$.

Elle croît de $-\infty$ à $+\infty$.

$$(\text{Argh})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

