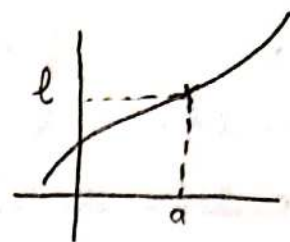
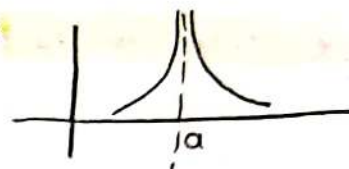


I. Limites:1. en un réel  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq M$$

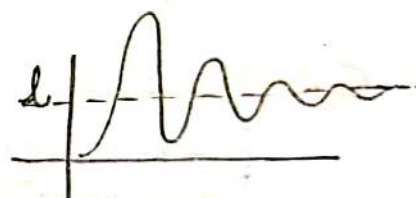


$\Delta: x=a$  : asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \end{cases}$$

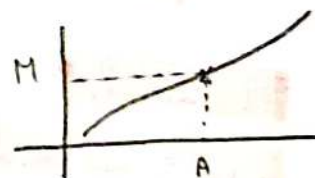
2. en l'infini ( $\infty$ ):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 / \forall x \in D_f, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$



$\Delta: y=l$  : asymptote horizontale à  $\mathcal{C}_f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists A > 0 / \forall x \in D_f, x > A \Rightarrow f(x) > M$$



## 3. Suite / Limite:

Caractéristique séquentielle de la limite:  $a \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$ 

$$\lim_a f = l \Leftrightarrow \forall (u_n)_n \text{ s.t. } u_n \rightarrow a \text{ alors } f(u_n) \rightarrow l$$

Critère de divergence

\* si  $\exists (u_n) / u_n \rightarrow a$  et  $f(u_n) \not\rightarrow l$  alors  $\lim_a f \neq l$

\* si  $\exists (u_n) \text{ et } (v_n) / \begin{cases} u_n \rightarrow a \\ v_n \rightarrow a \end{cases} \left. \begin{array}{l} \lim f(u_n) \neq \lim f(v_n) \\ \lim_a f \text{ n'existe pas} \end{array} \right\}$

- Unicité. Si une limite existe alors elle est unique- Fonction localement bornée: si  $\lim_a f = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$  bornée au  $V(a)$   $a \in \mathbb{R}$

## II. Continuité :

$f$  continue en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a} f = f(a)$

$f$  continue à droite en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f = f(a)$

$f$  continue à gauche en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a^-} f = f(a)$

$f$  continue sur  $D$  :  $f$  continue en tout pts de  $D$

$f$  continue en  $a \iff \begin{cases} f \text{ continue à gauche en } a \\ f \text{ continue à droite en } a \end{cases}$

Caractéristique séquentielle de la limite

$f$  continue en  $a \iff \begin{cases} \forall (u_n) \subset D \\ n \rightarrow \infty, u_n \rightarrow a \text{ alors } f(u_n) \rightarrow f(a) \end{cases}$

\* si  $f$  est continue alors  $\lim f = f(\lim)$  si elle existe

Corollaire : fonction définie par récurrence :

$f$  définie sur  $D$

$(u_n) \subset D : \begin{cases} u_0 \in D \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

$\left. \begin{array}{l} u_n \rightarrow l \\ f \text{ continue en } l \end{array} \right\} \Rightarrow f(l) = l$  ( $l$  est un pt fixe de  $f$ )

-  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f$  existe et fini

$\tilde{f}$  définie sur  $D$  par :  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \setminus \{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$

le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ .

-  $\left. \begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \text{ continue en } a$

-  $f$  continue sur  $I$  à valeurs dans  $J$  ( $f(I) \subset J$ )  
 $g$  continue sur  $J$   
alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$

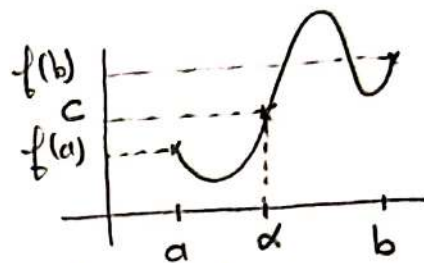
## \* T.V.I.:

- \*  $f$  continue sur  $[a, b]$ , toute valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$  possède un antécédent par  $f$  dans  $[a, b]$

$$\forall c \in [f(a), f(b)] \text{ (ou } [f(b), f(a)]) , \exists \alpha \in [a, b] / f(\alpha) = c$$

En particulier:  $f(a) < f(b) < c$

$$\exists \alpha \in ]a, b[ / f(\alpha) = c$$



\* si  $f$  est strict monotone alors  $\alpha$  est unique

\* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

\* L'image d'un segment par une fonction continue est un segment

$$\text{i.e. } f([a, b]) = [\alpha, \beta] = [f(c), f(d)]$$

$$\text{c.à.d. } \exists c, d \in [a, b] / \forall u \in [a, b], f(c) \leq f(u) \leq f(d) \\ (f(u) \in [f(c), f(d)])$$

## \* Bijection:

Si: \*  $I$  un intervalle

\*  $f$  continue sur  $I$

\*  $f$  strict monotone

alors

\*  $f$  est bijective de  $I$  sur  $f(I)$

\*  $f(I)$  est un intervalle

\*  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$

\*  $f^{-1}$  est strict monotone sur  $f(I)$  de m. sens de monotonie que  $f$

\*  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à  $\Delta: y = x$