

## La partie Entière (floor)

1/ Définition: la partie entière de  $x$  est:

initiation:  $\lfloor x \rfloor = E(x)$  le plus grand entier  $n$  tq  $n \leq x$

2/ Inégalités fondamentales:

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

3/ Relation avec la partie fractionnaire  $\{x\}$ :

$$\{x\} = x - E(x)$$

$$E_1: 0 \leq \{x\} < 1$$

4/ Formules de base:

$\forall n \in \mathbb{Z}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$E(n + x) = n + E(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ :

$$E(-x) = -E(x) - 1$$

$\forall x \in \mathbb{Z}$ :

$$E(-x) = -E(x) = -x$$

$$E(x) = x$$

5/ Formules Somme:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ :

$$E(x+y) = E(x) + E(y) + E$$

Attention!

$$E(x+y) \geq E(x) + E(y)$$

10/ Propriété:

si  $x \leq y$

$$\text{alors } E(x) \leq E(y)$$

le floor est une fonction croissante

car si  $x \leq y$

alors  $x$  et  $y$  sont dans la même

tranche entière

ou  $x$  est dans une

tranche entière et  $y$  est dans la

tranche entière suivante

alors  $E(x) \leq E(y)$

car  $E(x) \leq x < E(x) + 1$

et  $E(y) \leq y < E(y) + 1$

alors  $E(x) \leq E(y)$

car  $E(x) \leq x < E(x) + 1$

et  $E(y) \leq y < E(y) + 1$

alors  $E(x) \leq E(y)$

$$\text{avec: } E = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

6) Formule multiplication par un entier positif:

$$E(nx) = nE(x) + E(n\{x\}) \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

7) Formule pour les rationnels:

$$\text{si } x = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{Z}, q > 0)$$

$$E\left(\frac{p}{q}\right) = k \quad \text{où } kq \leq p < (k+1)q$$

Identité importante:

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = k \quad \Leftrightarrow \quad kn \leq x < (k+1)n$$

8) Combinaison:

$$E\left(E(x) + \frac{y}{n}\right) = E(x) + E\left(\frac{y}{n}\right)$$

$$E(n + \{x\}) = n$$

9) Formules connexes:

Somme:

$$E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Racine:

$$E(\sqrt{x}) = n \Leftrightarrow n^2 \leq x < (n+1)^2$$

Logarithme:

$$E(\log_b(x)) = n \Leftrightarrow b^n \leq x < b^{n+1}$$