

# Résumé sur les fonctions circulaires réciproques

## Fonction arcsinus (arcsin)

Bijection croissante de  $[-1, 1]$  sur  $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{si } x \in [-1, 1]$$

Fonction impaire : si  $x \in [-1, 1]$  on a  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ .

Fonction dérivable sur  $] -1, 1 [$  :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

## Fonction arccosinus (arccos)

Bijection décroissante de  $[-1, 1]$  sur  $[0, \pi]$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{si } x \in [0, \pi]$$

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{si } x \in [-1, 1]$$

Fonction dérivable sur  $] 0, \pi [$  :  $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

## Fonction arctangente (arctan)

Bijection croissante de  $\mathbf{R}$  sur  $] -\pi/2, \pi/2 [$

$$\arctan(\tan x) = x \quad \text{si } x \in ] -\pi/2, \pi/2 [$$

$$\tan(\arctan x) = x \quad \text{si } x \in ] -\infty, \infty [$$

Fonction impaire : si  $x \in \mathbf{R}$  on a  $\arctan(-x) = -\arctan x$ .

Fonction dérivable sur  $\mathbf{R}$  :  $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

Limites à l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

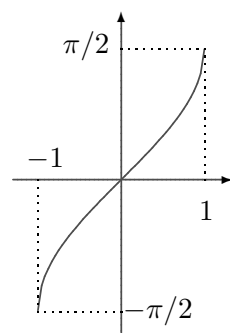
Formule utile : si  $x > 0$ ,  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ .

Tableau de valeurs à savoir retrouver rapidement

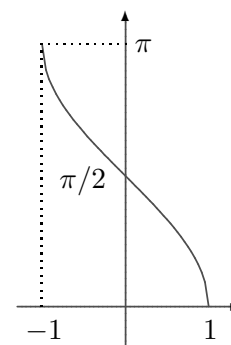
|             |                 |                 |                      |                      |                 |
|-------------|-----------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $x$         | 0               | $\frac{1}{2}$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\arcsin x$ | 0               | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\arccos x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{6}$      | 0               |

|             |   |                      |                 |                 |                 |
|-------------|---|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $x$         | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1               | $\sqrt{3}$      | $+\infty$       |
| $\arctan x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

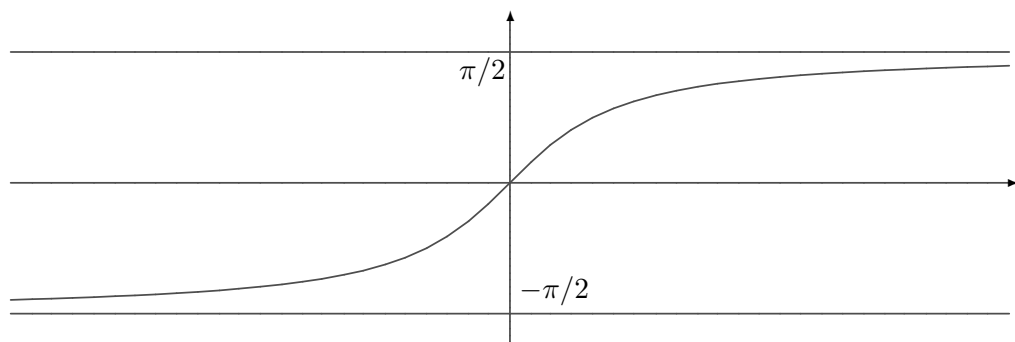
a)  $\arcsin x$



b)  $\arccos x$



c)  $\arctan x$



# Résumé sur les fonctions hyperboliques

Définitions : quel que soit  $x \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

## Fonction sinus hyperbolique (sh)

Bijection croissante de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$

Fonction impaire : si  $x \in \mathbf{R}$  on a  $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ .

Fonction dérivable sur  $\mathbf{R}$  :  $f'(x) = \operatorname{ch} x$

Limites à l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$

## Fonction cosinus hyperbolique (ch)

Application de  $\mathbf{R}$  sur  $]1, +\infty[$ . En particulier  $\operatorname{ch} 0 = 1$ .

Fonction paire : si  $x \in \mathbf{R}$  on a  $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ .

Fonction dérivable sur  $\mathbf{R}$  :  $f'(x) = \operatorname{sh} x$

Limites à l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$

Relations entre  $\operatorname{sh} x$  et  $\operatorname{ch} x$  :  $\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x$ ,  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ .

## Fonction tangente hyperbolique (th)

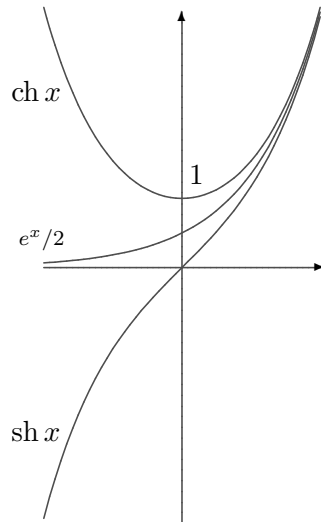
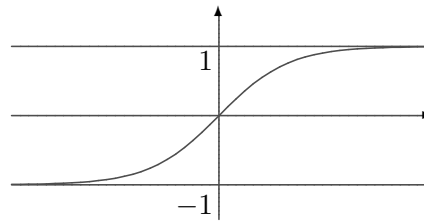
Bijection croissante de  $\mathbf{R}$  sur  $] -1, 1 [$

Fonction impaire : si  $x \in \mathbf{R}$  on a  $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$ .

Fonction dérivable sur  $\mathbf{R}$  :  $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$

Limites à l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = +1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1$

d)

e)  $\text{th } x$ 

## Résumé sur les fonctions hyperboliques inverses

### Fonction argument sinus hyperbolique ( $\text{argsh}$ )

Bijection croissante de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$

Fonction impaire : si  $x \in \mathbf{R}$  on a  $\text{argsh}(-x) = -\text{argsh } x$ .

Fonction dérivable sur  $\mathbf{R}$  :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Limites à l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{argsh } x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{argsh } x = -\infty$

Expression sous forme logarithmique : si  $x \in \mathbf{R}$  on a  $\text{argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

### Fonction argument cosinus hyperbolique ( $\text{argch}$ )

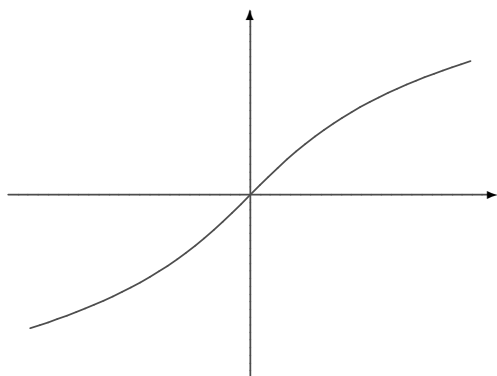
Bijection croissante de  $[1, +\infty[$  sur  $[0, +\infty[$

Fonction dérivable sur  $]1, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Limites à l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{argch } x = +\infty$

Expression sous forme logarithmique : si  $x \in ]1, +\infty[$  on a  $\text{argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

f)  $\operatorname{argsh} x$



g)  $\operatorname{argch} x$

