

Fonctions puissances:

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ a \mapsto a^\alpha = e^{\alpha \ln a} \\ (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{si } \alpha = m \in \mathbb{N}, m > 0: \\ a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ fois}}$$

f prolongeable par continuité pour $\alpha = 0$: $0^\alpha = 0, \forall \alpha > 0$ et $0^0 = 1$

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha, \quad a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha} = \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha$$

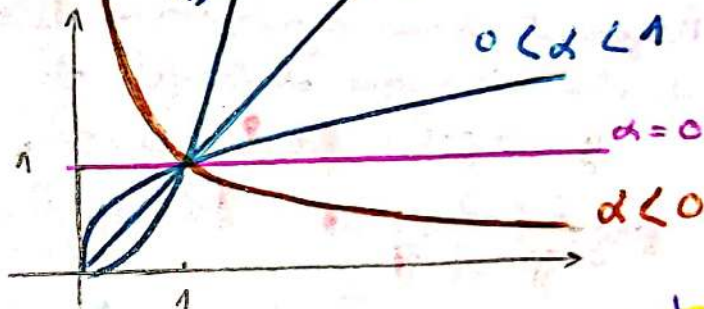
$$f: a \mapsto a^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$$

(pour $\alpha \geq 1, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$)

* $\alpha = 0$: f constante / $f(a) = 1$

* $\alpha > 0$: f strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

* $\alpha < 0$: f strict $\searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$



- si $\alpha \neq 0$ f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. la réciproque $f^{-1}: a \mapsto a^{\frac{1}{\alpha}}$
 pour $\alpha = m \in \mathbb{N}^*$: $a \mapsto a^{\frac{1}{m}}$ est notée $a \mapsto \sqrt[m]{a}$ la fonction racine $m^{\text{ème}}$.

$$\lim_{+\infty} \frac{e^{\alpha a}}{a^\beta} = +\infty \quad \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}_+^* \quad \lim_{+\infty} \frac{a^\beta}{(\ln a)^\delta} = +\infty$$

$$\lim_{+\infty} \frac{a^{\alpha a}}{(m a)^\delta} = +\infty$$

Fonctions hyperboliques:

* F.R. directes: (les formules d'Euler) ($a \in \mathbb{R}$)

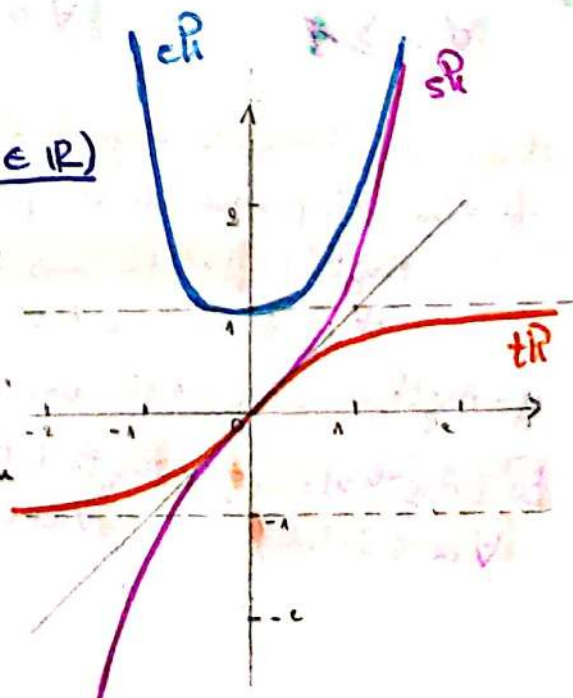
sinus hyperbolique: $sh: sh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$

cosinus hyperbolique: $ch: ch a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$

tangente hyperbolique: $th: th a = \frac{sh a}{ch a} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$

$$e^a = sh a + ch a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

impaire paire



$$\text{sh}' u = \text{ch} u$$

$$\text{ch}' u = \text{sh} u$$

$$\text{th}' u = 1 - \text{th}^2 u = \frac{1}{\text{ch}^2 u}$$

$$(\text{sh}, \text{ch}, \text{th}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

sh, th : fonctions impaires

ch : fonction paire

sh, th : strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

ch : $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$, $\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$

$$\text{ch} u \geq 1$$

$$\text{sh} u < \frac{e^u}{2} < \text{ch} u$$

$$-1 < \text{th} u < 1$$

$$\text{ch} 0 = 1$$

$$\text{sh} 0 = 0$$

$$\text{th} 0 = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{ch} u - 1}{u^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sh} u}{u} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{th} u}{u} = 1$$

$$\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$$

$$\text{ch}(2u) = \text{ch}^2 u + \text{sh}^2 u$$

$$\text{sh}(2u) = 2 \text{ch} u \text{sh} u$$

+ F. R. réciproques.

Argument sinus Hyperbolique: Argsh

fonction réciproque de la fct sh

$$y = \text{Argsh} u, u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u = \text{sh} y, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Argsh}(\text{sh} u) = u \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\text{sh}(\text{Argsh} u) = u \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Argument cosinus Hyperbolique: Argch

fonction réciproque de la fct ch

$$\text{Argch}: [1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

$$y = \text{Argch} u, u \geq 1 \Leftrightarrow u = \text{ch} y, y \geq 0$$

$$\text{ch}(\text{Argch} u) = u \quad \forall u \geq 1$$

$$\text{Argch}(\text{ch} u) = u \quad \forall u \geq 0$$

Argument tangente hyperbolique: Argth

fonction réciproque de la fct th

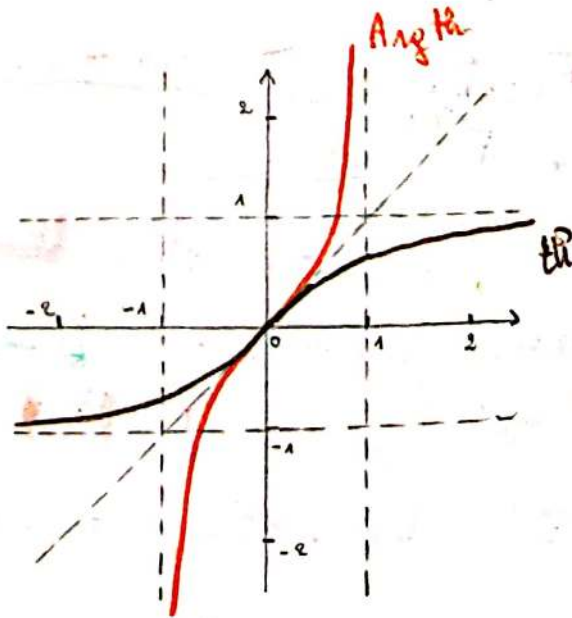
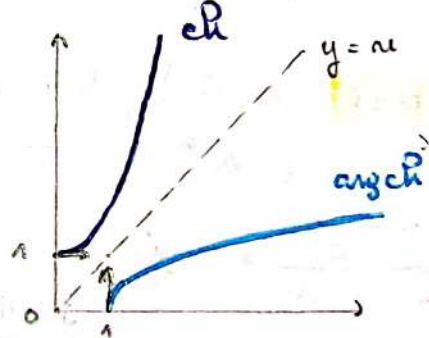
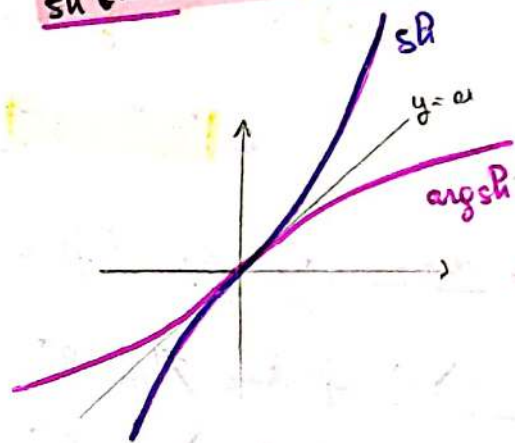
$$\text{Argth}:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{th}: \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$$

$$y = \text{Argth} u, u \in]-1, 1[\Leftrightarrow u = \text{th} y, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{th}(\text{Argth} u) = u \quad \forall u \in]-1, 1[$$

$$\text{Argth}(\text{th} u) = u \quad \forall u \in \mathbb{R}$$



$$\text{Argh} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \text{Argh}'(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\text{Argh} \in \mathcal{C}^\infty(]1, +\infty[) : \text{Argh}'(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \quad \forall u \in]1, +\infty[$$

$$\text{Argh} \in \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[) : \text{Argh}'(u) = \frac{1}{1-u^2} \quad \forall u \in]-1, 1[$$

$$\text{Argh}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2+1}) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$\text{Argh}(u) = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) \quad \forall u \in]1, +\infty[$$

$$\text{Argh}(u) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \quad \forall u \in]-1, 1[$$

Fonctions circulaires:

Rappels

$u \mapsto \sin u$
 $u \mapsto \cos u$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$
sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall u \in \mathbb{R}$

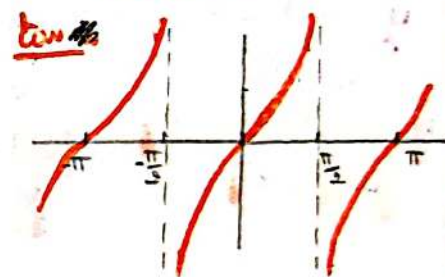
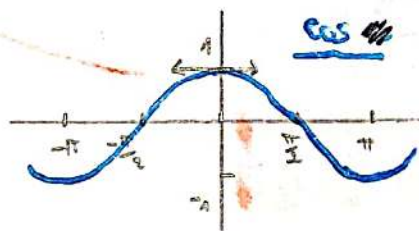
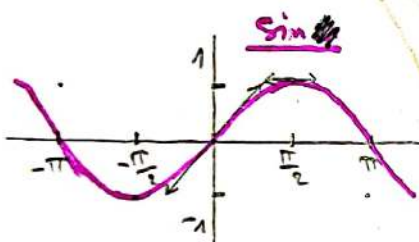
$$\sin' u = \cos u$$

$$\cos' u = -\sin u$$

$u \mapsto \tan u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
 et on a $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

$$\tan' u = 1 + \tan^2 u$$

$$= \frac{1}{\cos^2 u} = \frac{1}{1 - \sin^2 u}$$



$$\sin u = \sin y \Leftrightarrow u = y [2\pi] \text{ ou } u = \pi - y [2\pi]$$

$$\cos u = \cos y \Leftrightarrow u = y [2\pi] \text{ ou } u = -y [2\pi]$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - 1}{u^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1$$

Fonctions circulaires réciproques

$\sin$ continue stric $\nearrow$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \sin$ bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$

arc sin, arcsin, fonction réciproque
de la restriction de $\sin$ à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ($\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$)

$$\text{arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$y = \text{arcsin } u = \sin^{-1} u \Leftrightarrow u = \sin y$$

$$\forall u \in [-1, 1]$$

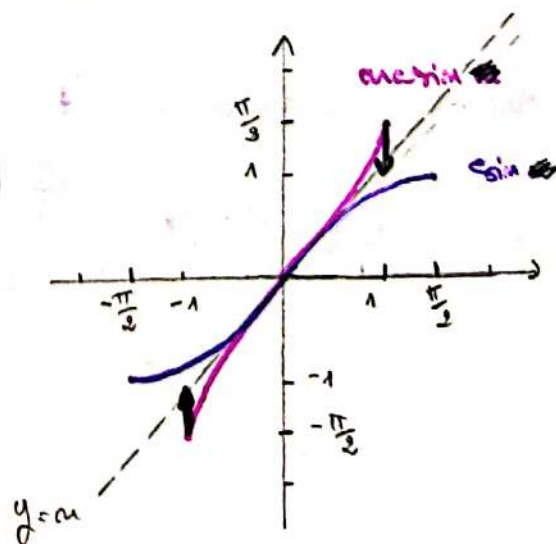
$$\forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin(\text{arcsin } u) = u \quad \forall u \in [-1, 1]$$

$$\text{arcsin}(\sin u) = u \quad \forall u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

les fonctions trigonométriques
ne sont pas bijectives.

On peut considérer des fonctions
réciproques en restreignant le
domaine de définition.

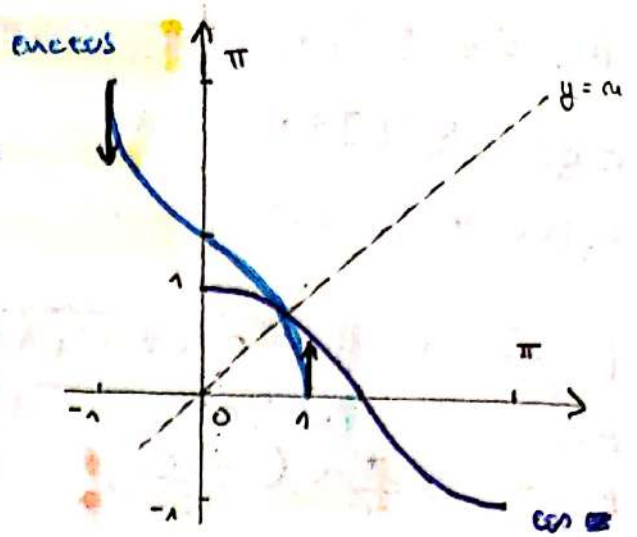


$\cos$ est continue stric $\nearrow$ sur $[0, \pi]$
 $\Rightarrow \cos$ est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$
 arc cosinus : arccos fonction réciproque
 de la restriction de $\cos$ à $[0, \pi]$

$$\text{arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$y = \text{arccos } x, \Leftrightarrow x = \cos y, \\ x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$$

$$\cos(\text{arccos } x) = x, \quad \text{arccos}(\cos x) = x \\ \forall x \in [-1, 1], \quad \forall x \in [0, \pi]$$



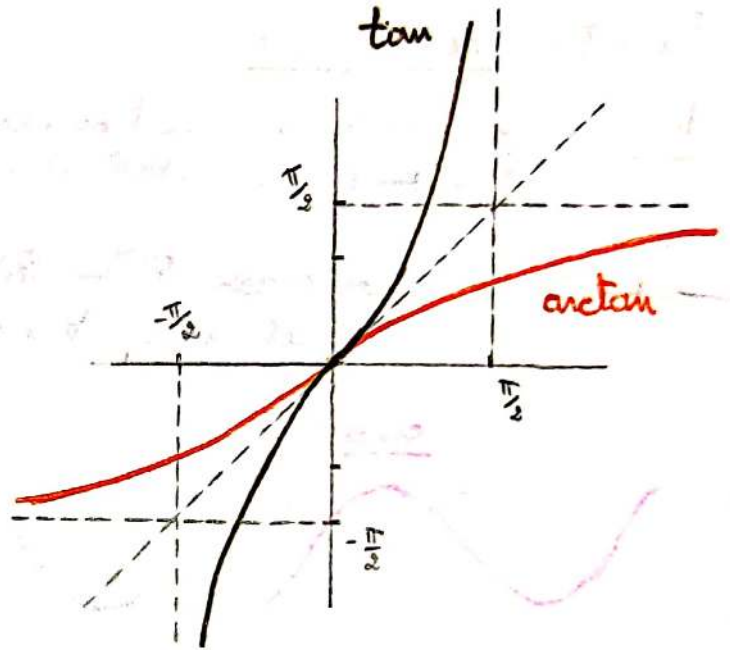
$\tan$ est continue stric $\nearrow$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$
 $\Rightarrow \tan$ bijective de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ sur $\mathbb{R}$

~~arc~~ arc tangente : arctan fonction
 réciproque de $\tan$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

$$\text{arctan} : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$

$$y = \text{arctan } x, \Leftrightarrow x = \tan y, \\ x \in \mathbb{R}, y \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$

$$\tan(\text{arctan } x) = x, \quad \text{arctan}(\tan x) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$$



$$\arcsin \in \mathcal{C}^\infty(-1, 1) :$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in]-1, 1[$$

$$\arccos \in \mathcal{C}^\infty(-1, 1) :$$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in]-1, 1[$$

$$\arctan \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) :$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$e^u = \cosh u + \sinh u$$

$$\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$$

$$\cosh^2 u + \sinh^2 u = 1$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$