



Départ. de Math.	Examen n°1	Matière : Analyse
Niveau : 1ère MPI		Durée : 1 H 30
Date : 06/01/2020		Nb de pages : 2

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un élément important pour l'appréciation des copies.

Documents, calculatrices, téléphones portables et tout autre gadget électronique sont non autorisés.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \operatorname{sh} \left(\frac{1}{x} \right)$.

1. Etudier la parité de f .
2. (a) Montrer que $x \underset{(0)}{\sim} \operatorname{sh} x$.
(b) Dédurre les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
(c) Déterminer les limites de f à droite et à gauche en 0.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \left(\operatorname{th} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right).$$

4. Montrer que pour tout $t > 0$, $\operatorname{th}(t) < t$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
6. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$, par $g(x) = f \left(\frac{1}{x} \right)$. Montrer que g se prolonge par continuité en 0 et que ce prolongement, qu'on notera toujours g , est dérivable sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le $DL_3(0)$ de la fonction sh .)

Exercice 2 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité D de la fonction f .
2. Déterminer le domaine de dérivabilité D' de f et expliciter $f'(x)$ pour tout $x \in D'$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution $x_0 \in]0, 1[$.

4. Établir que pour tout $x \in D$, on a

$$\cos(f(x)) = \sqrt{(1-x^2)(1-\frac{x^2}{4})} - \frac{x^2}{2}.$$

(On rappelle que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$).

5. Dédurre que $x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Exercice 3 Soient g et h les fonctions définies par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = 2 \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de g et donner le $DL_3(0)$ de la fonction g .

2. (a) Vérifier que h est bien définie sur $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

(b) Donner le $DL_3(0)$ de la fonction h .

3. On considère la fonction f définie par $f(x) = g(x) + h(x)$.

(a) Montrer que f est bien définie sur $] -1, \pi[\setminus \{0\}$.

(b) Donner le $DL_3(0)$ de la fonction f . Dédurre que f se prolonge en 0 en une fonction dérivable qu'on notera toujours f et donner $f'(0)$.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction J_α définie par

$$J_\alpha(x) = \frac{f(x)}{(1+x^2)^\alpha}.$$

(a) Donner le $DL_3(0)$ de la fonction J_α .

(b) Déterminer $J_\alpha(0)$, $J'_\alpha(0)$, $J''_\alpha(0)$ et $J^{(3)}_\alpha(0)$, en fonction de α .

(c) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe de J_α au point d'abscisse 0 et discuter suivant les valeurs de α la position relative de (T) et de la courbe de la fonction J_α au voisinage de 0.

Bon travail