

Chapitre I: Rappels et compléments sur les fcts d'une variable réelle

I) Limites:

Def 1:

1) Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a - \alpha; a + \alpha[$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

2) On appelle voisinage de $+\infty$ toute partie contenant un intervalle de type $] \alpha; +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) On appelle voisinage de $-\infty$ toute partie contenant un intervalle de type $] -\infty; \alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exple:

① $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$

" est un voisinage de 10^{-9}

$[0, 1]$ n'est pas un voisinage de 0

② $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas un voisinage de 2, c'est un voisinage de $1/2$.

③ $[0, 10^9]$ est un voisinage de 10^{-8}

Def 2:

Soit $l \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$ avec I voisinage de a . f est une fct numérique définie sur I sauf peut être en a . On dit f tend vers l lorsque x tend vers a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
 $\forall \varepsilon > 0 \exists b > 0 \forall x \in I - \{a\}$

$$|x - a| < b \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

avec $x \in]a - b, a + b[- \{a\}$, $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

*** Prop 1:** si f admet une limite l au pt a alors f est bornée au voisinage de a
 $(f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[)$

Def 3:

1) On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ si } \forall A > 0 \exists b > 0 \text{ tq } \forall x \in I - \{a\}$$

$$|x - a| < b \Rightarrow f(x) > A; x \in]a - b; a + b[$$

$$|x - a| < b \Rightarrow f(x) > A \Rightarrow f(x) \in]A; +\infty[$$

2) On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow a$ et on note:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \forall b < 0 \exists b > 0$$

$$\text{tq } \forall x \in I - \{a\}$$

$$|x - a| < b \Rightarrow f(x) < b$$

$$x \in]a - b; a + b[\\ f(x) \in]-\infty; b[$$

Def 4:

1) on dit que f admet une limite l à droite de a si $\forall \varepsilon > 0 \exists b > 0$

$$\forall x \in I \cap]a, a + b[; f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

2) on dit que f admet une limite l à gauche de a

$$\text{si } \forall \varepsilon > 0 \exists b > 0$$

$$\forall x \in I \cap]a - b, a[; f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$$

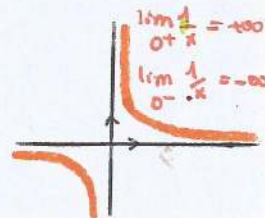
$$(-b < x - a < 0)$$

$$\text{Pg: } \lim_{a^+} f = +\infty$$

$$\lim_{a^+} f = -\infty$$

$$\lim_{a^-} f = +\infty$$

$$\lim_{a^-} f = -\infty$$



Théorème: $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\lim_a f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{a^+} f(x) = \lim_{a^-} f(x) = l$$

Exple:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0 car $\lim_{0^+} f \neq \lim_{0^-} f$

2) $g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\lim_{0^+} g = +\infty$ $\lim_{0^-} g = +\infty$ Donc $\lim_0 g \neq +\infty$

3) $h(x) = E(x)$; $E(x) < x < E(x) + 1$

$$\lim_{3^-} h = 2; \lim_{3^+} h = 3$$

$$\bullet k \in \mathbb{Z}; \lim_{k^+} h(x) = k \text{ or } \lim_{k^-} h(x) = k - 1$$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, h$ n'admet pas de limite au pt k

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}; \lim_{a^+} h(x) = \lim_{a^-} h(x) = E(a) = \lim_a h(x)$$

Def 5:

On suppose que f est une fct définie au v. $(+\infty)$ et $P \in \mathbb{R}$, on dit que $f \rightarrow P$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ on note:

$$\lim_{+\infty} f(x) = P \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \exists A > 0; \forall x \in I, x > A$$

$$\Rightarrow f(x) \in]P - \varepsilon; P + \varepsilon[\mid |f(x) - P| < \varepsilon \text{ et } x \in]A, +\infty[\cap I$$

Remarque 1:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = p, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

$\forall A > 0, \exists B > 0, x < -B \Rightarrow f(x) > A$

Remarque 2:

Une limite réelle est une limite unique

Propriété 2: (Encadrements)

$a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; f, g, h 3 fcts définies au voisinage de a (l'aut peut être en a)

$l \in \mathbb{R}, l' \in \mathbb{R}$ tq $f < g < h$ au v de a

1) si $\lim_a f = \lim_a h = l$ alors $\lim_a g = l$

2) si $\lim_a f = l$ et $\lim_a g = l'$ alors $l \leq l'$

3) si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$

4) si $\lim_a g = -\infty$ alors $\lim_a f = -\infty$

Propriété 3: Critère des suites

$a, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

S un v de a

f définie sur S sauf peut être en a

$\lim_a f = l \iff$ Pour toute suite $(x_n) \subset I$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$

Conséquence:

1) Si $\exists$ une suite x_n dans I tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ et tq $f(x_n)$ n'admet pas de limite alors f n'admet de limite en a .

2) Si $\exists$ deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ et tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$ alors f n'admet pas de limite

Exemple: $f(x) = \cos(1/x), x \in \mathbb{R}^*$

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad f(u_n) = 1$$

$$v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad f(v_n) = -1$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) \Rightarrow f$ n'admet pas de limite en 0

$$w_n = \frac{1}{n\pi}, \quad f(w_n) = (-1)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tq } |x-0| < \eta \Rightarrow |f(x)-0| < \epsilon$$

$$\text{Soit } \epsilon > 0 \exists b = \sqrt{\epsilon} \text{ tq } |x| < b \Rightarrow |x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq |x^2| < b^2 = \epsilon$$

$$\exists b' = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \text{ tq } |x| < b' \Rightarrow |f(x)| \leq |x|^2 < b'^2 = \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists b > 0 \text{ tq } |x-1| < b \Rightarrow |\sqrt{x+3} - 2| < \epsilon$$

$$|\sqrt{x+3} - 2| = \left| \frac{x-1}{\sqrt{x+3} + 2} \right| < \frac{|x-1|}{2} < \frac{b}{2}$$

$$\text{Soit } \epsilon > 0 \exists b = \epsilon$$

$$|x-1| < b \Rightarrow |\sqrt{x+3} - 2| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Il suffit de calculer $0 < \frac{b}{2} < \epsilon$

II) Relations de Comparaison:

$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; I un intervalle de $\mathbb{R} \neq \emptyset$ et on réduit à un pt $\neq a_0$ tq $x_0 \in I$ ou x_0 est une borne de I .

f, g deux fct définies sur I (sauf peut être en x_0)

Def 1:

On dit que g est négligeable devant f au v de (x_0) si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \iff \exists$ une fct $p \rightarrow 0$ tq $g(x) = p(x) \cdot f(x)$

$$\text{tq } g(x) = p(x) \cdot f(x) \Rightarrow \exists \text{ tq } \lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = 0$$

on note $g \ll f$ ou $g = o(f)$

g est un petit o de f

$$\text{Exemple: } x_0^3 = o(x^2) \text{ et } x^2 = o(x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$$

$$x^n = o(e^x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

$$f_n(x) = o(x^n), \quad f_n(x) = o(e^x)$$

Propriétés :

$$1) \begin{cases} g = o(f) \\ h = o(f) \end{cases} \Rightarrow g+h = o(f) \\ (o(f) + o(f) = o(f)) \\ (\lambda o(f) = o(f))$$

$$2) o(f_1) \cdot o(f_2) = o(f_1 \cdot f_2) \Rightarrow \varepsilon_1 f_1 \cdot \varepsilon_2 f_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (f_1 \cdot f_2) \\ o(f) \cdot o(f) \neq o(f) \quad \varepsilon_1 f \cdot \varepsilon_2 f = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 f) f$$

$$\cdot \left(\frac{1}{x^2} \right)_0 = o\left(\frac{1}{x^4}\right) \\ \frac{1}{x^2} \neq o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$3) g = o(f) \Rightarrow \frac{1}{g} = o\left(\frac{1}{f}\right)$$

$$4) o(o(f)) = o(f) \quad \begin{matrix} h = o(g) & \frac{h}{g} \rightarrow 0 \\ g = o(f) & \frac{g}{f} \rightarrow 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{h}{f} \rightarrow 0$$

$$5) (f_2)_b = o(f_1) \quad \left\{ \begin{matrix} g \rightarrow b \\ x \rightarrow a \end{matrix} \right\} (f_2 \circ g)_a = o(f_1 \circ g)$$

$$\text{on a } x^3 = o(x^2) \quad \text{et } g(x) = x-1 \\ \begin{matrix} \uparrow f_2 \\ x^3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow f_1 \\ x^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow g \\ x-1 \end{matrix} \\ (x-1)^3 = o((x-1)^2)$$

Def 2:

On dit que f est équivalente à g au $v(x_0)$ ssi $\exists \lambda : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x) = \lambda(x) g(x)$ $\forall x \in \mathbb{I}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda(x) = 1$

$$\text{On note } f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = 1$$

$$\Rightarrow f - g = o(g) \\ \left(\begin{matrix} f - g = \lambda g - g \\ = (\lambda - 1)g \end{matrix} \right) \\ \frac{f-g}{g} \rightarrow 0$$

Remarque :

$$f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow g \sim_{x_0} f$$

$$\updownarrow \\ f = (1+g)g \\ \varepsilon \rightarrow 0 \\ x_0$$

Exemples usuels :

$$1) \lim_{x_0} f = l \neq 0 \Rightarrow f \sim_{x_0} l$$

2) Si f est d en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors

$$f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\sin(x) \sim x ; \tan(x) \sim x ; e^x - 1 \sim x ; \ln(1+x) \sim x ; \ln x \sim x-1 ;$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$3) \lim_0 \frac{\cos x - 1}{x^2} = -1/2 \Rightarrow \cos x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{avec } 1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$4) P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ; a_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow P \sim_{\infty} a_n x^n ; P \sim_{\infty} a_0$$

$$\Rightarrow \text{Si } a_0 = 0 \Rightarrow P \sim_{\infty} a_1 x$$

$$\text{Si } a_0 = a_1 = 0 \Rightarrow P \sim_{\infty} a_2 x^2$$

$P \sim_{\infty} a_k x^k$ avec $k \in \mathbb{Z}^+$ p't le plus petit entier tq $a_k \neq 0$

$$5) F(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_k x^k}{b_m x^m + \dots + b_p x^p}$$

$$\Rightarrow F(x) \sim_{\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

$$F(x) \sim_{\infty} \frac{a_k}{b_p} x^{k-p}$$

$$\frac{2x^3 + 1}{x^5 + 1/2} \sim_{\infty} \frac{2}{x^2} \sim_{\infty} 2x$$

$0 \leq k \leq n$
 $a_k \neq 0$
 $b_p \neq 0$
 $0 \leq p \leq m$

Rq : on n'écrit jamais $f \sim_{x_0} 0$ ①

Propriétés :

$$1) f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow g \sim_{x_0} f$$

$$2) f \sim_{x_0} f$$

$$3) \left. \begin{matrix} f \sim_{x_0} g \\ g \sim_{x_0} h \end{matrix} \right\} \Rightarrow f \sim_{x_0} h$$

$$4) \lim_{x_0} f = l \neq 0 \Rightarrow f \sim_{x_0} l$$

$$5) \left. \begin{matrix} f \sim_{x_0} g \\ \lim_{x_0} g = l \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lim_{x_0} f = l$$

⊛ la réciproque est fautive :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} g \not\Rightarrow f \sim g$$

exp $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x$ or on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} \neq 1$

$$\Rightarrow x^2 \not\sim x$$

6) $f + \mathcal{O}(f) \sim f$

7) $f \sim g \Rightarrow f$ et g sont de même signe au $v(x_0)$

⊛ Par contre si $f \sim g$

f monotone $\not\Rightarrow g$ est monotone

exp $\frac{1}{1+x} \sim \frac{1}{1-x}$

exp : $f(x) = x \sim x - 2 \sin x = g(x)$
 $\Rightarrow |f| \nearrow \Rightarrow g'(x) = 1 - 2 \cos(x)$

8) si $f \sim g$ et si f ne s'annule pas au $v(x_0)$ alors il est de même pour g (sauf peut-être en x_0)

9) Si $\left. \begin{array}{l} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{array} \right\}$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

10) si $\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ g > 0 \text{ au } v(x_0) \end{array} \right\}$ alors $\forall r \in \mathbb{R} \quad f^r \sim g^r$
 $\hookrightarrow e^{r \ln(f)}$ doit être (+)

11) si $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} g = y_0 \\ f_1 \sim f_2 \end{array} \right\}$ alors $f_1 \circ g \sim f_2 \circ g$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1 \circ g}{f_2 \circ g} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_1}{f_2} = 0$

Rques : Pièges à éviter !!

1) $\left. \begin{array}{l} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{array} \right\} \not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

exple : $f_1 = \sqrt{1+x} \sim 1+x = g_1$
 $f_2 = \sqrt{1-x} \sim -1+x = g_2$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{1}{2} \neq 1 \Rightarrow f_1 + f_2 \not\sim g_1 + g_2$

2) si $\left. \begin{array}{l} f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2 \\ f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont de même signe} \\ \text{constant en } v(x_0) \end{array} \right\}$ Alors : $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

3) $f \sim g \not\Rightarrow e^f \sim e^g$

exple : $x^2 + 1 \sim_{+0} x^2$
 $\frac{e^{x^2+1}}{e^{x^2}} \not\rightarrow 1$

or

$\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ g \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow e^f \sim e^g$

3) $\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ f > 0 \end{array} \right\} \not\Rightarrow \ln f \sim \ln g$

$f(x) = 1 + 2x^2$ et $g(x) = 1 + 3x^2$
 $f \sim g$ mais $\ln f \not\sim \ln g$

$\Rightarrow \frac{\ln f}{\ln g} = \frac{\ln(1+2x^2)}{\ln(1+3x^2)} \sim \frac{2x^2}{3x^2} \neq 1$

Donc : $\frac{\ln f}{\ln g} = 1 + \frac{\ln(f/g)}{\ln g} \sim \frac{1}{\ln g}$

si $\left. \begin{array}{l} f \sim g \\ f > 0 \text{ et } f \rightarrow 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \ln f \sim \ln g$

Rques :

$x_0 \in \mathbb{R}$:

$\left. \begin{array}{l} f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1 \\ f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = 1 \end{array} \right\} \underline{\underline{f \sim g}}$

exple : 1) $e^{1/x} - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$
 $e^{1/x} - 1 \sim_{0^+} e^{1/x}$
 $e^{1/x} - 1 \sim_{-1} -1$

$e^u - 1 \sim u$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x + x^4 + x + 1}{\sin x + \sqrt{x^2 + 1} + 3x} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x^4 + x + 1 \sim x^4 = o(e^x) \\ \ln(x) = o(e^x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^x + \ln(x) + x^4 + x + 1 \sim e^x$$

car $\varphi + o(\varphi) + o(\varphi) \sim \varphi$

$$\sqrt{x^2 + 1} \sim x = o(e^x) \text{ et } -1 \leq \sin x < 1$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

$\begin{cases} -e^x \leq \frac{\sin x}{e^x} < e^{-x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{e^x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = o(e^x)$

Exercice:

Donner un équivalent de $f(x) = e^{1/x^2} - e^{1/(x+1)^2}$

III) Continuité:

Def 1: I un intervalle de $\mathbb{R}$; $I =]a, b[$;
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

1) a. On dit que f est $\underset{c}{\text{en}} x_0$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

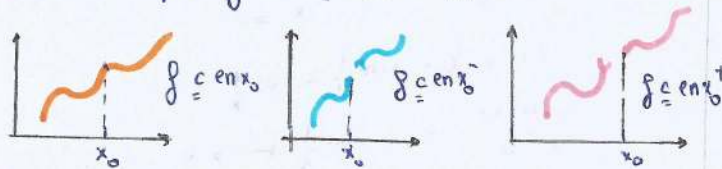
b. f est $\underset{c}{\text{à dr}} de x_0$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

c. f est $\underset{c}{\text{à gauche}} de x_0$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

2) On dit que f est $\underset{c}{\text{en}} I$ si



Rq: f est $\underset{c}{\text{en}} x_0 \Leftrightarrow f$ est $\underset{c}{\text{à gauche}}$ et $\underset{c}{\text{à droite}}$ en x_0

expl:

$$1) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- $f: x \mapsto \frac{1}{x} \in \text{non } \mathbb{R}^*$
- $\varphi: x \mapsto \sin x \in \text{sur } \mathbb{R}$
- $h: x \mapsto x \in \text{sur } \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f = h \circ (\varphi \circ \varphi) \text{ est } \underset{c}{\text{sur}} \mathbb{R}^*$$

$$2) f(x) = E(x)$$

$f \in \text{en } \mathbb{R} \mid \mathbb{Z}$



$$k \in \mathbb{Z} \quad \lim_{x \rightarrow k^+} f = k = f(k)$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f = k - 1$$

f est $\underset{c}{\text{à droite}}$ de $\mathbb{N}$ entier, mais n'est pas $\underset{c}{\text{à gauche}}$

Propriété:

$$f \text{ est } \underset{c}{\text{en}} x_0 \Leftrightarrow \forall (u_n)_n \subset I \text{ tq } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x_0)$$

Def 2: I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient $x_0 \in I$ et $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

f est prolongeable par continuité au pt x_0 la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est $\underset{c}{\text{sur}} I$

$\tilde{f}$: prolongement par $\underset{c}{\text{de}} f$ en x_0

Rq: Mq que f prolong en x_0
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f$

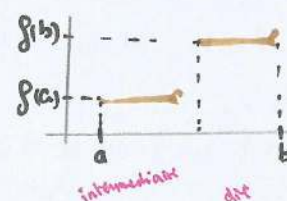
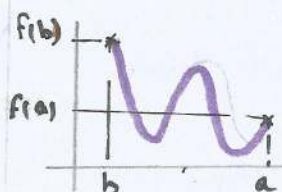
Théorème TVI:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$a, b \in I \text{ tq } f(a) < f(b)$$

On a: $\forall \lambda \in [f(a), f(b)] \exists c$ entre a et b tq $\lambda = f(c)$ (c.à.d f atteint toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$)



Rq: Le TVI reste valable pour une fct qui n'est pas $\subseteq$ en un nbre finie de pt mais qui est prolongeable en ces pts

Application:

Le TVI s'utilise souvent dans le cas où $k=0$. Si une fct $\subseteq$ en 2 valeurs de signe opposé, alors elle s'annule au moins une fois.

Corollaire 1:

• L'image d'un intervalle par une fct $\subseteq$ est un intervalle

ex: 1) $g(x) = \sin x$

2) $g(x) = \frac{1}{x}$

$$g([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$$

$$g([0, \pi]) = [0, 1]$$

$$g([0, 2\pi]) = [1, 1]$$

$$g([0, 1]) = [1, +\infty[$$

$$g([\frac{1}{2}, 1]) = [\frac{1}{2}, 2]$$

⇒ On remarque que le type de l'intervalle (fermé, ouvert, borné...) n'est pas tjrs conservé par une fct $\subseteq$. Par contre c'est le cas si c'est un segment (borné, fermé).

Corollaire 2:

• L'image d'un segment par une fct $\subseteq$ est un segment

exercice:

Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$.

Mq si f est $\subseteq$ donc f admt au moins un pt fixe ($\exists c \text{ tq } f(c) = c$)

IV - Dérivation

Déf:

$a < b$ $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in]a, b[$

Pour $x \in]a, b[$ on pose $T(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

1) On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} T(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite, dans ce cas, est appelée dérivée de f en x_0 notée $f'(x_0)$

2) On dit que f est d à droite de x_0 (resp, à gauche de x_0). Si $T(x)$ (resp $\lim_{x \rightarrow x_0} T(x)$) $\exists$ de $\mathbb{R}$

Cette limite est appelée dérivé à droite (resp d à gauche de x_0) et notée $f'_d(x_0)$ (resp $f'_g(x_0)$)

3) On dit que f est d en $]a, b[$ si elle est d en tt pt de $]a, b[$.

On appelle fct dérivée de f notée:

$$f':]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

Propriété:

f est d en $x_0 \Leftrightarrow f$ est d à dte et à gauche de x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) =$$

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Interprétation géométrique

$$T(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{pente de } D$$



$$f'(x): \text{pente tge} : \Delta : f'(x)(x - y_0) + f(x_0)$$

• f n'est pas d $\Rightarrow$ pente verticale: $\lim_{x \rightarrow x_0} T(x) = \pm \infty$

• Si f est d sur $]a, b[$, ne pas confondre $f'(x_0)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \text{ si } f' \text{ est } \subseteq \text{ en } x_0$$

exple: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$x = 0 : \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$f \text{ est d sur } \mathbb{R} : f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

Propriété:

• f est d en $x_0 \not\Rightarrow f$ est $\subseteq$ en x_0

exple:



$$f(x) = |x| \text{ est } \subseteq$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = \lim_{x \rightarrow 0} f = f(0)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

$$T(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} f'_d(0) = 1 \\ f'_g(0) = -1 \end{matrix} \right\} f \text{ n'est pas d en } 0$$

Théo: f fonction bijective,

I un intervalle de $\mathbb{R}$: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$

1) f est $\subset$ et strict monotone alors:

a- f est bijective de I sur $f(I)$

b- f^{-1} est $\subset$ sur $f(I)$
 f^{-1} est monotone

2) Si f est d en x_0 , $f'(x_0) \neq 0$

$$\bullet f^{-1} \text{ est d en } f(x_0) = y_0 \text{ et } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Fonction circulaires reciproque:

1) La Fonction Arc sinus:

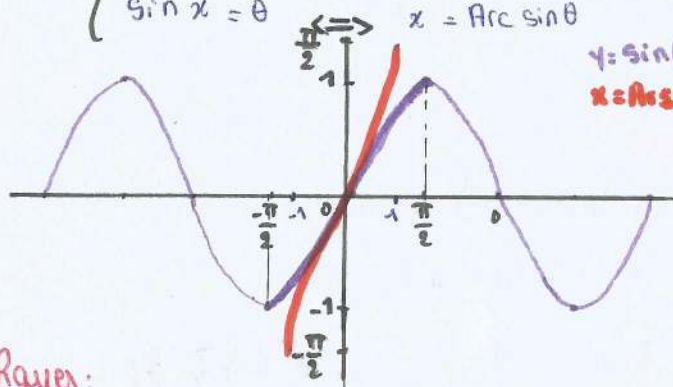
La fonction sinus: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est $\subset$ et strict $\uparrow$

donc admet une fct reciproque notée:

$$\text{Arc sin} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset \text{est strict } \uparrow$$

$$\bullet \text{ On a } \begin{cases} \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \forall \theta \in [-1, 1] \\ \sin x = \theta \end{cases} \quad x = \text{Arc sin } \theta$$

$$\begin{matrix} y = \sin(x) \\ x = \text{Arc sin}(y) \end{matrix}$$



Rques:

1) Arc sin est impaire

2) La fct $(\sin \circ \text{Arc sin})$ est def sur $[-1, 1]$:

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \sin \circ \text{Arc sin } x = x$$

la reciproque de fct impaire $\Rightarrow$ impaire / mais la recip d'une fct paire n'est pas forcément paire ni impaire

3) Δ La fct $f = \text{Arc sin} \circ \sin$ est def sur $\mathbb{R}$:

On n'a pas $f(\theta) = \theta$

Exple: $\text{Arc sin}(\sin \pi) = \text{Arc sin } 0 = 0 \neq \pi$

$\bullet f$ est periodique

$$\text{Arc sin} \circ \sin \theta = \theta \quad \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

4) La fct sur: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est d et ma $\sin' \theta = \cos \theta \neq 0 \quad \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Donc Arc sin est d sur $] -1, 1[$ on a:

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in]-1, 1[; \text{Arc sin}'(x) &= \frac{1}{\sin'(\text{Arc sin } x)} \\ &= \frac{1}{\cos(\text{Arc sin } x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\text{Arc sin } x))^2}} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]-1, 1[; \text{Arc sin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

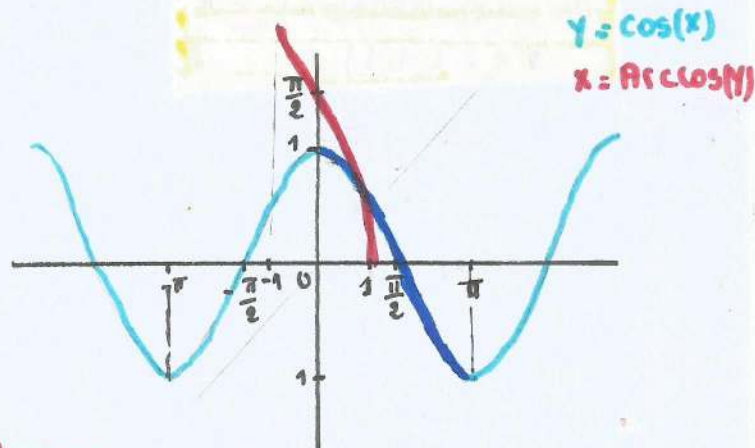
2) La Fonction Arc cosinus:

La fonction cos $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est $\subset$ et strict $\downarrow$

donc admet une fct reciproque appelee:

$$\text{Arc cos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \subset \text{est strict } \downarrow$$

$$\text{On a } \begin{cases} \forall x \in [-1, 1] \\ \forall \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad \cos \theta = x \Leftrightarrow \theta = \text{Arc cos } x$$



Rques:

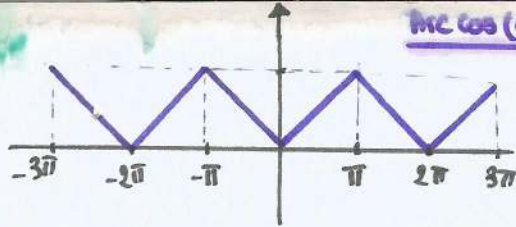
$$1) \forall x \in [-1, 1] \quad \cos(\text{Arc cos } x) = x$$

2) $\theta \mapsto \text{Arc cos}(\cos \theta)$ est def sur $\mathbb{R}$

$$\text{Arc cos}(\cos 2\pi) = 0 \neq 2\pi$$

$$\forall \theta \in [0, \pi] \quad \text{Arc cos}(\cos \theta) = \theta$$

Δ Pas Tjr



$$\text{Arc cos}(\cos \theta) = \gamma$$

Donc : $\forall \theta \in [0, \pi]$; $\text{Arc cos}(\cos \theta) = \theta$

$\forall \theta \in [\pi, 2\pi]$; $\text{Arc cos}(\cos \theta) = \text{Arc cos}(\cos(\theta - 2\pi))$
 $= -\theta'$
 $= 2\pi - \theta'$

$$\theta = \theta' + \pi$$

$$\cos \theta = \cos(\theta' + \pi) = -\cos \theta'$$

$$f(\theta) = \text{Arc cos}(-\cos \theta') \quad \text{avec } \theta' \in [-\pi, 0]$$

$\forall \theta \in [-\pi, 0] \Rightarrow -\theta \in [0, \pi]$;

$$\text{Arc cos}(\cos \theta) = \text{Arc cos}(\cos(-\theta)) = -\theta$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \begin{cases} \theta & ; \text{si } \theta \in [0, \pi] \\ -\theta & ; \text{si } \theta \in [-\pi, 0] \\ 2\pi - \theta & ; \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi] \\ 2\pi + \theta & ; \text{si } \theta \in [-2\pi, -\pi] \end{cases}$$

$\bullet \theta \in [2\pi, -\pi] \rightarrow \theta + 2\pi \in [0, \pi]$
 $f(\theta) = f(\theta + 2\pi) = \theta + 2\pi$
 $-\theta \in [\pi, 2\pi]$
 $f(\theta) = f(\theta) = 2\pi - (-\theta)$

3) La fct° Arc cos n'est ni paire ni impaire

$$\text{On a } \text{Arc cos}(x) + \text{Arc cos}(-x) = \pi$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$

Dem: $\alpha \in [0, \pi] \Leftrightarrow \pi - \alpha \in [0, \pi]$

$$\cos \alpha = x \Leftrightarrow \alpha = \text{Arc cos } x = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Arc cos}(-x) &= \text{Arc cos}(-\cos \alpha) \\ &= \text{Arc cos}(\cos(\pi - \alpha)) \\ &= \pi - \alpha \\ &= \pi - \text{Arc cos}(x) \end{aligned}$$

4) $\forall x \in [-1, 1]$

$$\text{Arc cos } x + \text{Arc sin } x = \frac{\pi}{2}$$

Dem: $\theta = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x\right) \\ &= \sin(\text{Arc sin } x) \\ &= x \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arc sin } x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\cos \theta = x \Leftrightarrow \theta = \text{Arc cos } x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } x$$

5) La fct Arc cos est d sur $] -1, 1[$:

$$\forall x \in] -1, 1[: \text{Arc cos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Dem:

$$\begin{aligned} \bullet \text{Arc cos}'(x) &= \frac{1}{\cos'(\text{Arc cos } x)} = \frac{-1}{\sin(\text{Arc cos } x)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\text{Arc cos } x)}} \end{aligned}$$

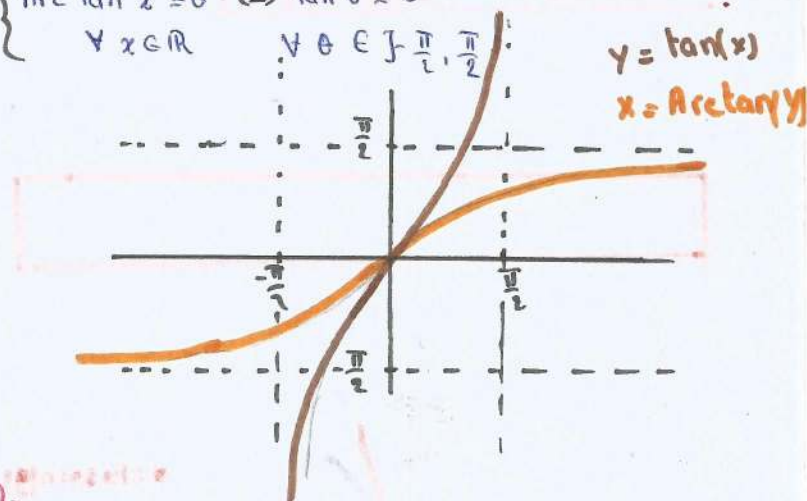
3) La Fonction Arctangente:

La fct° $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est c et strict ↗

donc bijective la fct° réciproque notée:

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ c et strict } \nearrow$$

$$\begin{cases} \text{Arc tan } x = \theta \Leftrightarrow \tan \theta = x \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$



Remarques:

1) La fct° Arctan est impaire

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\text{Arctan } x) = x$

3) $\text{Arc tan}(\tan \theta) = \theta \quad \text{si } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

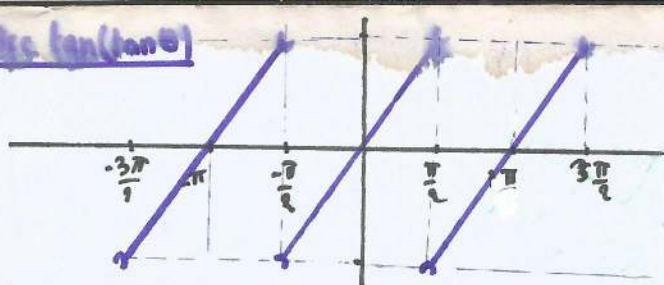
$$\text{ex: } \text{Arctan}(\tan \pi) = 0 \neq \pi$$

$$\psi(\theta) = \text{Arctan}(\tan \theta) \text{ def sur } \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Rightarrow \psi(\theta) = \psi(\theta - 2\pi) = \theta - 2\pi$$

$$\theta \in]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[\Leftrightarrow \theta - 2\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

4) Arc tan(tan θ)



4) La fct Arc tan est d sur $\mathbb{R}$

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Arc tan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Dem:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Arc tan}' x &= \frac{1}{\tan'(\text{Arc tan } x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arc tan } x)} \end{aligned}$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\text{Arc tan } x + \text{Arc tan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Dem:

$$\bullet \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = 0$$

$$x > 0: \theta = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan } x$$

$$\tan \theta = \dots$$

$$x < 0: \alpha = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan } x$$

IV Dérivées successives:

Défs:

1) a- On dit que f est 2 fois d si f est d sur I et sa dérivée est aussi d. On note:

$$f'' = (f')' = f^{(2)}$$

→ On appelle dérivée second ou dérivée d'ordre 2

b- Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la dérivée n-ème de f ou dérivée d'ordre n , en posant

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \quad \text{dérivable}$$

2) a- f est de classe C^n sur I si $f^{(n)}$ existe et $\in C$ sur I

b- f est de classe C^∞ (ou indéfiniment dérivable) si $f^{(n)}$ existe $\forall n \in \mathbb{N}$

Exple:

$$\textcircled{1} f(x) = e^x: f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{2} P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$C^\infty P'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

$$P^{(n)} = n! \cdot a_n$$

$$R > n a_n; P^{(R)} = 0$$

$$\textcircled{3} f(x) = x^{r/q}$$

$$f'(x) = \frac{r}{q} x^{r/q-1} \quad x \in [0, +\infty[$$

$$f''(x) = \frac{r(r-q)}{q^2} x^{r/q-2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{r(r-q)(r-2q)}{q^3} x^{r/q-3}$$

$$f \text{ est } C^2 \text{ sur } [0, +\infty[$$

$$f \text{ est } C^\infty \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2}$$

$$f''(x) = \frac{+2}{(x-a)^3}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$$

(récurrence)

Propriétés: I un intervalle de $\mathbb{R}$

1) $\lambda \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$

$$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

Si f et g sont n fois dérivables
(respect de classe $\mathcal{C}^n$)

Alors $f+g$ est n fois dérivable
(respect de classe $\mathcal{C}^n$)

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

2) $f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad g : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$

si f est n fois dérivable sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I)

et si g est n fois dérivable sur $f(I)$ (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur $f(I)$)

Alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I
(resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I)

Propriété: Formule de Leibniz

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R} : n$ fois d

On a $f \cdot g$ est n fois d et $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Dém:

$$n=1 \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} = C_n^0 f^{(0)} g^{(n-0)} + C_n^1 f^{(1)} g^{(n-1)} \\ = fg^{(n)} + f'g^{(n-1)}$$

$$n \geq 1 \quad \text{Hyp} \quad (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$\text{Mq } (f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} ??$$

$$\text{On a } (f \cdot g)^{(n+1)} = [(f \cdot g)^{(n)}]' \\ = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\ = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)} g^{(n-k)})'$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k-1)}] \\ = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k-1)}$$

$$(f \cdot g)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ = \sum_{k=1}^{n+1} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)}$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ = \frac{n! [k + (n+1-k)]}{k! (n+1-k)!}$$

$$C_{n+1}^k = \frac{n! (n+1)}{k! (n+1-k)!}$$

Exemple

$$1) n \in \mathbb{N}^+ \quad \lim_{n \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{n}$$

$$\begin{cases} f(x) = x-1 \\ g(x) = x^n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} \rightarrow \frac{1}{n}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = ?$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$$

$$\bullet f(x) = \sin^2 x - x^2 \quad f(0) = 0 \quad \sim \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$$

$$\bullet f'(x) = 2 \cos x \sin x - 2x = \sin 2x - 2x$$

$$\bullet g(x) = x^4 \quad g(0) = 0$$

$$\bullet g'(x) = 4x^3$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\sin 2x - 2x}{4x^3}$$

$$\bullet f''(x) = 2 \cos 2x - 2$$

$$\bullet g''(x) = 12x^2$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{2 \cos 2x - 2}{12x^2}$$

$$\bullet f'''(x) = -4 \sin 2x$$

$$\bullet g'''(x) = 24x$$

$$\Rightarrow \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{-4 \sin 2x}{24x} \sim \frac{-4(2x)}{24x} \sim -\frac{1}{3}$$

V) Fonctions hyperboliques ; Fonctions hyperboliques Reciproques

* Fonctions hyperboliques :

Déf :

1) On appelle **sinus hyperbolique** et l'on note **sh** la fonction $sh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2) On appelle **cosinus hyperbolique** et l'on note **ch** la fonction :

$$ch : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) On appelle **tangente hyperbolique** et l'on note **th** la fonction :

$$th : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{sh}{ch}$$

Propriétés :

1) sh et th sont impairs

ch est paire

$$2) ch x + sh x = e^x$$

$$ch x - sh x = e^{-x} \Rightarrow ch x \geq sh x$$

$$ch' x - sh' x = 1$$

$$1 - th^2 = \frac{1}{ch^2}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$ch x \geq sh x$$

$$ch x \geq 1$$

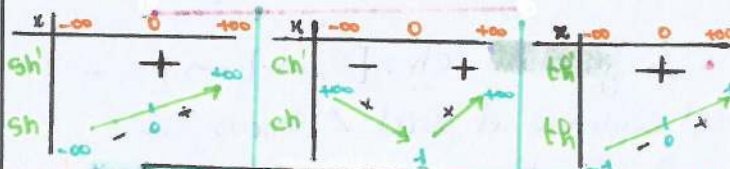
Propriétés :

ch, sh et th sont dérivable sur $\mathbb{R}$

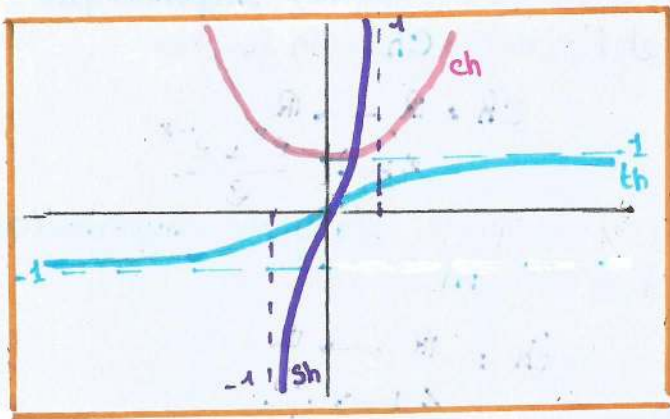
$$ch' = sh$$

$$sh' = ch$$

$$th' = 1 - th^2 = \frac{1}{ch^2}$$



$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$



* Fonctions hyperboliques réciproques:

• La fonction sh est continue et strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est bijective.

• Sa fonction réciproque s'appelle **Arg sh**
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 (impaire, str $\nearrow$, const)

Propriétés:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$y = sh x \Leftrightarrow x = Arg sh y$$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad Arg sh(sh x) = x$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad sh(Arg sh y) = y$$

Propriétés:

• La fct $Arg sh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $sh = ch \neq 0$)
 et $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$Arg sh' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

• La fonction $ch : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est continue et strict $\nearrow$ donc bijective

• Sa fonction réciproque s'appelle **Arg ch**
 $[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$
 (c et strict $\nearrow$)

$\forall x \in [0, +\infty[\quad \forall y \in [1, +\infty[$

$$ch x = y \Leftrightarrow x = Arg ch y$$

Rqes:

$$\forall y \in [1, +\infty[\quad ch[Arg ch y] = y$$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad Arg ch(ch x) = x$$

Propriétés:

• $Arg ch$ est d sur $]1, +\infty[$ ($ch' = sh \neq 0$ sur $]0, +\infty[$)

$\forall y \in]1, +\infty[$

$$Arg ch' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned} ch^2 - sh^2 &= 1 \\ sh^2 &= ch^2 - 1 \\ sh &= \sqrt{ch^2 - 1} \end{aligned}$$

• La fct $th \rightarrow]-1, 1[$ continue et str $\nearrow$ donc big: **Arg th** (c, strict $\nearrow$ et impaire)

$$th^{-1} = Arg th \quad]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-1, 1[$

$$y = th x \Leftrightarrow Arg th y = x$$

Propriétés:

• La fonction $Arg th$ est d sur $] -1, 1[$

$$Arg th' y = \frac{1}{1-y^2}$$

Exercice:

$$Mq: \forall y \in \mathbb{R} : Arg sh(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$$

$$\forall y \in [1, +\infty[\quad Arg ch(y) = \ln(\sqrt{y^2-1} + y)$$

$$\forall y \in]-1, 1[\quad Arg th(y) = \ln \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

Inégalités accroissements finis:

1) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

si $\exists M \geq 0$ tq $|f'(x)| \leq M \forall x \in I$ alors

$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ pour tout $(x, y) \in I$
 f est lipschitzienne

Exple: $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow |\sin x| \leq |x|$

2) $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\begin{matrix} \text{d sur }]a, b[\\ \text{c sur } [a, b] \end{matrix}$

si $\forall x \in [a, b] |f'(x)| \leq g'(x)$ alors

$$\forall x \in [a, b] |f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a)$$

Démonstration:

$$|f'| \leq g'$$

$$-g' \leq f' \leq g' \Leftrightarrow \begin{cases} f' - g' \leq 0 \quad (*) \\ f' + g' \geq 0 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \quad f' - g' \leq 0 \Rightarrow (f - g)' \leq 0 \Rightarrow (f - g)(x) \leq (f - g)(a) \\ f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$$

$$(**) \quad f' + g' \geq 0 \Rightarrow (f + g)' \geq 0 \Rightarrow (f + g)(x) \geq (f + g)(a) \\ \Rightarrow f(x) - f(a) \geq g(a) - g(x)$$

Remarque:

1) Remplacer $\leq$ par $<$

$$2) f(a) \leq g(b) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

Exple:

$$\text{Mq: } \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{3}, \quad \forall x \geq 0$$

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow g'(x) = x^2$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq 1 \Rightarrow f'(x) \leq g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$$

Exercice:

$$\text{Mq } \forall x \in \mathbb{R} \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right) \leq \frac{x^4}{24}$$

$$x \geq 0: \cos x \leq 1 \Rightarrow |\sin x - \sin 0| \leq |x - 0|$$

$$|\sin x| \leq x$$

$$|-\cos x - (-\cos 0)| \leq \frac{x^2}{2} - 0$$

$$\Rightarrow |\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$$

$$|(\sin x - x) - (\sin 0 - 0)| \leq \frac{x^3}{6} - 0$$

$$|\sin x - x| \leq \frac{x^3}{6}$$

$$\left| -\cos x - \frac{x^2}{2} - (-\cos 0 - 0) \right| \leq \frac{x^4}{24} - 0$$

$$\left| \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \right| \leq \frac{x^4}{24}$$

$$x < 0: x' = -x \geq 0$$

$$|\cos x| + \frac{x^2}{2} - 1 \leq \frac{x^4}{24}$$

Théorème des accroissements finis généralisés

Théo: $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\begin{matrix} \text{c sur } [a, b] \\ \text{d sur }]a, b[\end{matrix}$

Si g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors

$$\exists c \in]a, b[\text{ tq } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dem: (Rolle) $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \Rightarrow \exists c \text{ tq } \varphi'(c) = 0$$

Corollaire:

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ $x_0 \in [a, b]$

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\begin{matrix} \text{c sur } [a, b] \\ \text{d sur }]a, b[\text{ sauf peut-être} \\ \text{en } x_0 \end{matrix}$

si $\forall x \neq x_0: g'(x) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l$$

$\exists c_n$ entre x et x_0

$$\text{tq } \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$$

124

Exercice :

$$e^x = x^0 e^x ; f(x) = x^0 ; f'(x) = 0x ; f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 1$$
$$g(x) = e^x ; g^{(n-k)}(x) = e^x$$

$$e^n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

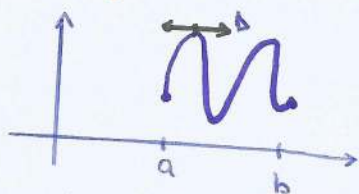
Théorème de Rolle :

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $a < b \in \mathbb{R}$

f est c sur $[a, b]$
 f sur $]a, b[$
 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$

Interprétation géo :



$\exists$ un pt de C_f sur lequel la tge Δ est // à l'Ox

Rq : $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$

$$f(1) = f(-1)$$



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(1) = f(-1)$$

$$f'(0) = 0$$

Dem :

$$f = \text{cte} \Rightarrow f' = 0$$

$$f \neq \text{cte}$$

$$f(a) = f(b)$$

Chapitre II : Formules de Taylor - 1

Développement limité

Introduction:

- f est dérivable en x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
- Si l'on pose $E(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$
- $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0) E(x)$
 $= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0)$ (car $E(x) \rightarrow 0$)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{o((x - x_0)^n)} E(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = 0$$

c'est la formule de Taylor Young à l'ordre n au vge (x_0)

Exemple:

1) $f(x) = e^x$; F.T.Y au v(0) d'ordre 1

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + o(x^3)$$

- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Application:

Soit $p \in \mathbb{N}^+$ le plus petit entier tq la dérivée p ème de f au pt x_0 soit non nulle.

Càd $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0$
 et $f^{(p)}(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^p \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} + o((x - x_0)^p)$$

et on a $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (x - x_0)^p \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}$

En particulier:

Si $f'(x_0) \neq 0$, $f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (x - x_0) f'(x_0)$

Exemple:

$\cos'(0) = 0$ $\cos''(0) = -1 \neq 0$

$\cos(x) - \cos(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \cos''(0)$

$\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

$\sinh' = \cosh \Rightarrow \sinh'(0) = \cosh(0) = 1 \neq 0$

$\sinh x - \sinh 0 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \sinh'(0)$

$\sinh x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

$\cosh'(0) = \sinh(0) = 0$

$\cosh''(0) = \cosh(0) = 1 \neq 0$

$\cosh x - \cosh 0 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \cosh''(0)$

$\cosh x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

I) Les formules de Taylor:

1) Formule de Taylor Lagrange:

Théorème: $n \in \mathbb{N}$, $a < b$ & réels

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois d sur $[a, b]$.

$x_0 \in [a, b]$

$f \in C^n \Rightarrow f$ continue

$\forall x \in [a, b]$, $\exists c$ entre x et x_0 tq:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

c'est la formule de Taylor Lagrange d'ordre n au vge (x_0)

Remarque: pour $n=0$: TAF

Exemple:

1) $\forall x > 0$ on a $\ln(1+x) < x < \ln(1+x) + \frac{x^2}{2}$

$f(x) = \ln(1+x)$

Formule de Tay. Lag à l'ordre 2 au vge (0)

2) Donner une valeur approchée du nbre $\sqrt[3]{1,3}$:

$f(x) = x^{1/3}$; F.T.L à l'ordre 2 (au vge (1)) $\Rightarrow$ sur $]1, 1,3[$

(plus précis)
 $x=1$ et $x=1,3$

2) Formule de Taylor Young

Théorème: $n \in \mathbb{N}$, $a < b < c$ & réels

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, C^n

$\forall x_0 \in [a, b]$, $\exists E: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tq:

II) Développement Limité:

Déf 1: I un interval de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction déf sur I. On dit que f admet un developpement limité au $v(x_0)$ d'ordre n , s'il existe un polynome P_n de degré $\leq n$ tq:

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$
 $x \rightarrow x_0$

- $P_n(x-x_0)$: N'appelle la partie régulière du developpement limité
- $o((x-x_0)^n)$: N'appelle le reste du developpement limité

Exemple:

1) $f(x) = e^x$: On déjà vu que f admet un developpement limité d'ordre 3 au $v(0)$.

$DL_3(0)(f)$ à l'ordre 3:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - 2x^2 + \frac{x^3}{2} \sin x;$$

$$\frac{x^3}{2} \sin x = x^2 \left(\frac{x}{2} \sin x \right)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{x}{2} \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$f(x) = x - 2x^2 + o(x^2) = P_2 + o(x^2)$$

f admet un $DL_2(0)$

Déf 2: Soit $a \in \mathbb{R}$ et f déf sur $[a, +\infty[$. On dit que f admet un developpement limité d'ordre a en $+\infty$ s'il existe un polynome P_n de degré $\leq n$ tq:

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$

Exemple:

$$f(x) = \frac{x+1+\ln(1+x)-\ln x}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$DL_{1/2}(\infty)$

$$= 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Remarques:

1) $n \geq 1$; si f admet $DL_n(x_0)$ alors f admet un developpement limité d'ordre p au $v(x_0)$ $\forall p \leq n$.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_p(x-x_0)^p + a_{p+1}(x-x_0)^{p+1} + \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

$$+ (x-x_0)^p [a_{p+1}(x-x_0) + a_{p+2}(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^{n-p} + (x-x_0)^{n-p} \varepsilon(x)]$$

$$f(x) = P_p(x-x_0) + o((x-x_0)^p)$$

2) Un devp limité au $v(0)$ s'écrit tjrs sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Pour écrire un DL au $v(x_0)$ on pose $X = x - x_0$
($x = X + x_0$)

Théorème:

Si f admet un $DL_n(x_0)$ alors ce D.P. est unique.

Propriété: Soit f une fct ayant un DL_n au $v(p)$ de partie régulière P

Si f est paire: Alors P est paire

Si f est impaire: Alors P est impaire

Propriété 2:

- 1) Si f admet un $DL_0(x_0)$; $f(x) = a_0 + \varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ $x \rightarrow x_0$
- Si $x_0 \in D_f$ alors f est $\leq$ en x_0 et $f(x_0) = a_0$
 - Si $x_0 \notin D_f$ alors f est prolongeable par $\leq$ en x_0

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0 = f(x_0)$

$\rightarrow$ Si f n'admet pas de limite en x_0 Alors f n'admet pas de $DL_0(x_0)$

2) Si f admet un $DL_1(x_0)$; $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + o(x-x_0)$ et $x_0 \in D_f$

Alors f est $\leq$ en x_0 ; $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$

f admet $DL_1 \rightarrow f$ admet DL_0

Remarque:

Pour $n \geq 2$

f admet un $DL_n(x_0) \Rightarrow f$ est n fois $\leq$ en x_0

Exple:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + x^2 + x^2 \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 + x^2 + o(x^2)$$

f admet un $DP_2(0) \Rightarrow f$ admet un $DP_1(0)$

$$f(0) = 1; f'(0) = a_1 = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 2 + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \text{ n'admet pas}$$

de limite quand $x \rightarrow 0 \Rightarrow f'(0) \nexists$

Proposition:

Si f est de classe C^n sur un intervalle I contenant

x_0 . Alors f admet un $DP_n(x_0)$ donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\ &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

Remarque

L'hypothèse de la formule de Taylor Young est une condition suffisante non nécessaire (f peut avoir un $DP_n(x_0)$ sans être de classe C^n sur I)

• Exemple: $(e^x)^{(k)} = e^x$, $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} x^k + o(x^n)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

III) Opérations sur les develop. limités

On suppose que $x_0 = 0$

1) DP d'une combinaison linéaire:

Si f et g sont 2 fct ayant au vol des DP_n de parties régulières resp P et Q . Alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ admet $DP_n(0)$ de partie régulière $\alpha P + \beta Q$

• Exemple:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\rightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24!} + o(x^4)$$

4) DP d'un quotient:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \xi_f(x)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + x^n \xi_g(x)$$

• DP de $\frac{f}{g}$? On suppose $b_0 \neq 0$

$$\frac{f}{g} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n)}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n)}$$

$$b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$$

$b_0 = 0$ et $a_0 \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} = \infty$

$\frac{f}{g}$ n'admet pas de DP

• Exemple:

DP(0) de $\tan x$:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}$$

$$\tan(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\odot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

$$= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^3 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^4 + o(x^5)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4) \right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{3! \cdot 2} + \frac{5x^5}{24} + o(x^5)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$$

2ème Méthode :

$$\begin{aligned} & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ & - \left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} \right) \\ & - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} \right) \\ & - \left(\frac{2}{15} x^5 - \frac{1}{3 \cdot 4!} x^3 \right) \\ & - \left(\frac{2}{15} x^5 - \frac{2^3}{15} + \frac{2x^3}{4! \cdot 15} \right) \\ & \left((1x^3 + 11x^3) = o(x^5) \right) \end{aligned}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$$

Exercice : DP's (0) de $\tan(x)$ par les 2 méthodes.

5) DP d'une primitive:

Propriété:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$,

Si f' admet un $dp_n(x_0)$: $f'(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$

Alors f admet un $dp_{n+1}(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1})$$

Exe: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\bullet \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

Exercice :

$$\operatorname{Arcsin}' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\operatorname{Arcos}' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad (1+x)^a = 1 + a + \frac{a(a-1)}{2} x^2$$

$$\operatorname{Argsh}' :$$

$$\operatorname{Argch}' :$$

$$\operatorname{Argth}' :$$

$$\bullet \tan' x = 1 + \tan^2 x$$

$$DP(0) : \tan(x) = \tan(0) + x \tan'(0) + o(x) = x + o(x)$$

$$\tan(x) = 1 + \tan^2 = 1 + (x + o(x))^2 = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$\tan(x) - \tan(0) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + (x + \frac{x^3}{3} + o(x^3))^2 \\ &= 1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\tan(x) - \tan(0) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} x^5 + o(x^5)$$

6) DP d'une dérivée: Prop:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ tq $0 \in I$ et f def: $I \rightarrow \mathbb{R}$

Si f est de classe C^1 et si f et f' admettent des DP d'ordre resp $n+1$ et n

$$\left. \begin{aligned} f &= P + o(x^{n+1}) \\ f' &= Q + o(x^n) \end{aligned} \right\} \text{ Alors } P' = Q$$

Remarque: On peut avoir une fct f ayant un DP_{n+1} au v(0) sans que f' admette un DP.

Exemple: $f(x) = \begin{cases} x + x^3 \sin \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = x + o(x^2)$$

f admet un $DP_2(0)$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 3x \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

Limite f' n'existe pas

f n'admet pas de $DP_0(0)$
" " de $DP_1(0)$

①

$$\boxed{\begin{aligned} f' \text{ n'admet une } DP_n(0) &\Rightarrow f \text{ admet une } DP_{n+1}(0) \\ f \text{ admet une } DP_{n+1}(0) &\nRightarrow f \text{ admet un } DP_n(0) \end{aligned}}$$

Exple: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ cherch l'asymptote (3)

pose $X = \frac{1}{x}$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + 1} \Rightarrow (1+u)^{\frac{1}{2}}$$

IV) Application du Dp:

1) Calcul de limite:

2) Position de la courbe % à une tg:

Soit f une fct déf au v (x_0)

$$M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \mathcal{C}_f$$

f admet un DP (x_0) de la forme: avec $p \neq 0 \geq 2$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underbrace{a_p(x-x_0)^p + o((x-x_0)^p)}_{\substack{(x-x_0)^p \cdot (a_p + \varepsilon_6(n)) \\ \text{on a } \varepsilon_6(n) \rightarrow 0 \text{ que } a_p}}$$

Alors: $\begin{cases} a_0 = f(x_0) \\ a_1 = f'(x_0) \end{cases}$

1) $y = a_0 + a_1(x-x_0)$ est l'eq de la tgte à la courbe $\mathcal{C}_f$ au pt M_0

2) La position de la courbe % à la tgte en M_0 est donnée par le signe de $a_p(x-x_0)^p$

Exple:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 2x + 2) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \ln 2 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

L'eq de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au pt d'abscisse 0

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln 2 \\ f'(0) &= 1 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} y = \ln 2 + x \\ x > 0; f - y < 0 \text{ d/e} \\ x < 0; f - y > 0 \text{ e/d} \end{array} \right.$$

3) Position de la courbe % d'un asym:

On suppose que f admet un dvp de la forme:

$$\boxed{f(x) = \alpha x + \beta + \varepsilon(x)} \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$$

Alors $\Delta: y = \alpha x + \beta$ est une asymptote.

Si de plus, on a: $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right)$

La position de $\mathcal{C}_f$ % à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_p}{x^p}$