

Nombres complexes et trigonométrie

1 Rappel des propriétés élémentaires de nombres complexes

1.1 Forme algébrique

On suppose connue l'existence de l'ensemble $\mathbb{C}$, possédant un élément i vérifiant $i^2 = -1$, muni de deux opérations $+$ et $\times$ qui prolongent celles de $\mathbb{R}$.

Définition 1 (*Forme algébrique*) Tout nombre complexe z de $\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

▷ Le nombre a s'appelle **la partie réelle** de z et b s'appelle **la partie imaginaire** de z . On note : $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$.

▷ Deux complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont égaux si $a = a'$ et $b = b'$.

Opérations:

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :

- addition : $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
- multiplication: $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Les opérations $+$ et $\times$ ont les mêmes propriétés que les sommes et produits dans $\mathbb{R}$.

1.2 Conjugué

Définition 2 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle **conjugué** de z le complexe noté $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés 3 1. $\forall z \in \mathbb{C}, \bar{\bar{z}} = z$.

2. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

3. $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

4. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

5. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}.$$

En notant $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$,

$$z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff z = -\bar{z}.$$

L'ensemble $i\mathbb{R}$ est appelé ensemble des imaginaires pures.

1.3 Module

Définition 4 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle **module** de z le réel positif noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 5 1. Si $z \in \mathbb{R}$, le module de z est égal à la valeur absolue de z .

2. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$z = 0 \iff |z| = 0.$$

Propriétés 6 1. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \times \bar{z} = |z|^2$.

En particulier, si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) - i \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

3. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

Si de plus $z' \neq 0$,

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Proposition 7 (Inégalité triangulaire) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, alors

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Preuve. Il suffit d'élever au carré. ■

2 Interprétation géométrique et exponentielle complexe

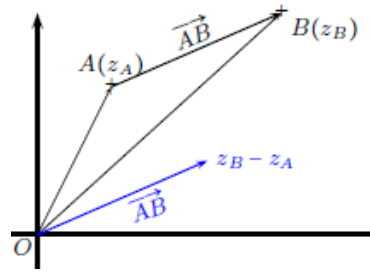
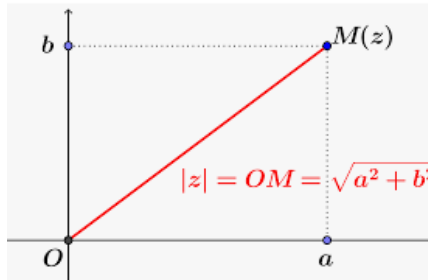
On note $\mathcal{P}$ le plan réel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On peut mettre en bijection $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ par l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ z = a + ib &\longrightarrow M(a, b) \end{aligned}$$

On note parfois $M(z)$ le point de coordonnées (a, b) et on dit qu'il s'agit du point d'affixe z . Ou encore, on dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est d'affixe z .

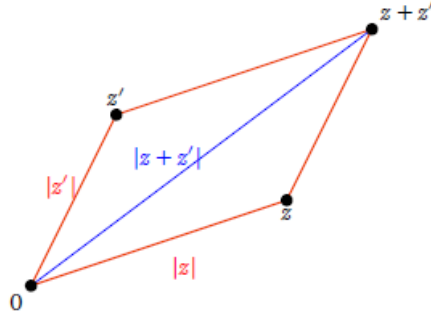
Ainsi si deux points A et B sont respectivement d'affixe z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe $z_B - z_A$.

Représentation graphique



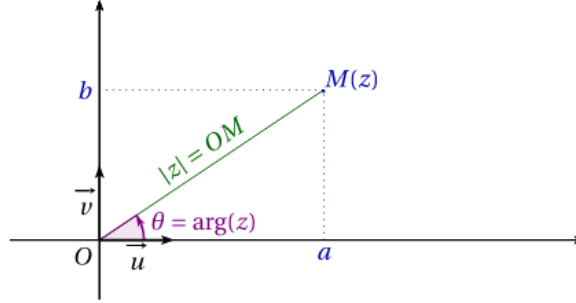
On remarque que la distance de O à M est égale à $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et que la distance $AB = |z_B - z_A|$.

Remarque 8 On peut retrouver l'inégalité triangulaire à l'aide de la représentation graphique suivante:



2.1 Forme trigonométrique et argument d'un complexe:

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on peut définir $z_0 = \frac{z}{|z|}$. Ce complexe est alors de module 1, c'est-à-dire que le point M_0 d'affixe z_0 se trouve sur le cercle unité.



Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que le point M_0 ait pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$, c'est-à-dire que $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$. On en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du complexe z . Les réels θ satisfaisant cette relation s'appellent des **arguments** de z et se notent $\arg(z)$, ils sont tous égaux modulo 2π .

2.2 Forme exponentielle d'un complexe:

Définition 9 (notation exponentielle) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Cette notation permet d'écrire tout complexe z sous **forme exponentielle**

$$z = re^{i\theta} \text{ où } r \in [0, +\infty[\text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

Ici r et θ sont respectivement le module et un argument de z .

Remarque 10 D'après la notation exponentielle, l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 est donné par

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 11 (Égalité de deux complexes sous forme exponentielle) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, où $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $r, r' \in [0, +\infty[$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors

$$z = z' \iff r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 12 (Règles de calcul sur les exponentielles complexes) Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

De plus, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

2.3 Racines n -ièmes de l'unité

Définition 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre complexe z est appelé racine n -ième de l'unité lorsqu'il vérifie $z^n = 1$.

Proposition 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n -ièmes de l'unité vérifie

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in [[0, n-1]] \right\}$$

Preuve. Le résultat découle des équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U}_n &\iff z^n = 1 = e^{2ik\pi}, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff z = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff z = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

■

Exercice: Expliciter les ensembles $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4$.

3 Formule de Moivre et formule d'Euler

Proposition 15 (Formules d'Euler) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 16 (Formule de Moivre) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Ces formules s'obtiennent facilement en utilisant la définition de la notation exponentielle. Nous les appliquons dans la suite à deux problèmes : le développement et la linéarisation.

Exercice (linéarisation): Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer le produit $\sin^2 \theta \cos^3 \theta$ comme somme d'expression de la forme $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$.

Méthode : Avec la formule d'Euler, on écrit $\sin^2 \theta \cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3$. On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.

Exercice (développement): Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction des puissances de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Méthode : On utilise la formule de Moivre pour écrire $\cos(5\theta) + i \sin(5\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^5$ que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Rappel: Nombre de combinaisons et formule de binôme de Newton.

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, on pose

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

C_n^p représente le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments, c'est-à-dire le nombre d'ensembles de p éléments de E .

Propriétés 17 Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$,

1. $C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^p = C_n^{n-p}$.
2. Relation de Pascal: $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$.

3. Formule de binôme de Newton: Soit $a, b \in \mathbb{C}$, alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

Exemple: Développer $(a + b)^5$. La formule de binôme de Newton permet d'écrire:

$$(a + b)^5 = a^5 + \mathcal{C}_5^1 a^4 b + \mathcal{C}_5^2 a^3 b^2 + \mathcal{C}_5^3 a^2 b^3 + \mathcal{C}_5^4 a b^4 + b^5.$$

La relation de Pascal permet de trouver de proche en proche les nombres de combinaisons à l'aide du tableau suivant:

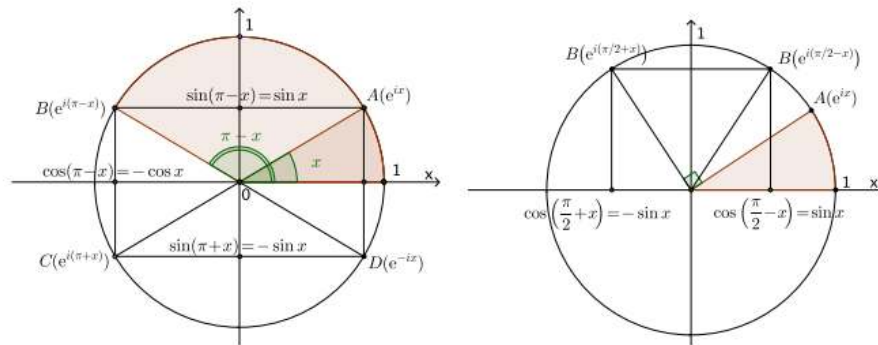
$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On en déduit alors que

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

4 Formules de trigonométrie

Les formules élémentaires suivantes se voient facilement sur le cercle trigonométrique:



$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$

A l'aide de l'égalité $e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$, on retrouve les formules suivantes:

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ (lorsque cela est défini)

Lorsque $a = b$, on obtient les formules de duplication suivantes:

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ (lorsque cela est défini)

Transformation de produit en somme:

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos (a+b) + \cos (a-b)] \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin (a+b) + \sin (a-b)]\end{aligned}$$

Transformation de somme en produit:

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)\end{aligned}$$

5 Equation du second degré à coefficients réels: cas où $\Delta < 0$

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E) .

Proposition 18 *Si $\Delta < 0$, alors l'équation du second degré (E) admet deux solutions complexes conjuguées:*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$