



Université de Tunis El Manar
FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS

Responsables : Ben Hammouda W.

Sections : LEEA1, LSTIC et LPC1

Module : Algèbre 1

TD : N° 3

Exercice 1 : Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$
4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1)\}$
5. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$
6. $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables.
7. V_1 est l'ensemble des fonctions bornées.
8. V_2 est l'ensemble des fonctions majorées.
9. V_3 est l'ensemble des fonctions paires.

Exercice 2 : Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. $u = (1, 2, 3)$
2. $u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$

Exercice 3 : Pour chacun des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont en somme directe.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ et
 $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$ et
 $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}$

Exercice 4 : (Familles libres, Familles génératrices)

1. Préciser si les familles suivantes sont libres ou non :
 - (a) Dans $\mathbb{R}^2$: $\{(1, 2); (3, 5)\}$
 - (b) Dans $\mathbb{R}^3$: $\{(1, 2, 3); (1, -2, -3); (1, 4, 3)\}$
 - (c) Dans $\mathbb{R}^4$: $\{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 1, 1); (0, 2, 2, 2); (1, 1, 1, 0)\}$
2. Préciser si les familles suivantes sont génératrices ou non :
 - (a) Dans $\mathbb{R}^3$: $\{(1, 0, 0); (1, 1, 0)\}$
 - (b) Dans $\mathbb{R}^4$: $\{(1, 0, 1, 0); (1, 1, 1, 0); (1, 0, 0, 1); (0, 0, 0, 1)\}$

Exercice 5 : (Base)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\{(1, 1, -1); (-1, 1, 1); (1, -1, 1)\}$

1. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$
2. Donner les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base

Exercice 6 : (Dimension) :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $E = Vect\{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (5, 3, -2)\}$

1. Quelle est la dimension du sous-espace engendré par les vecteurs de cette famille ?
2. Quelle relation doivent vérifier les réels x, y, z pour que le vecteur $v = (x, y, z)$ appartient à E ?

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\} \\ F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\} \end{aligned}$$

1. Montrer que E et F représentent l'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. En déduire que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner $\dim(E)$ et $\dim(F)$.
3. Déterminer $E \cap F$.

Exercice 8 : Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F .
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
6. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Correction Série 3 : Algèbre I

Solution exercice n° : 1 Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel car :

- $E_1 \neq \emptyset$: le vecteur nul $(0, 0, 0)$ appartient à E_1 ,
- stable par addition : si $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 + z_2 = 0$, alors la somme vérifie aussi cette égalité,
- stable par multiplication scalaire.

2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}$

Non, ce n'est pas un sous-espace car ce n'est pas stable par addition. Exemple :

$$(1, 0, 0) \in E_2 \quad \text{et} \quad (0, 0, 1) \in E_2, \quad \text{mais} \quad (1, 0, 1) \notin E_2.$$

3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$

Oui, intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1)\}$

Oui, car l'application $P \mapsto P(0) - P(1)$ est linéaire, et l'ensemble est le noyau de cette application.

5. $E_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel, car c'est aussi le noyau d'une application linéaire $P \mapsto P'(0)$.

6. D : l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont dérivables.

Oui, l'ensemble des fonctions dérivables est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, car la somme et le produit par un scalaire d'une fonction dérivable sont dérivables.

7. V_1 : l'ensemble des fonctions bornées $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. **Oui**, c'est un sous-espace vectoriel : stable par addition et stable par multiplication par un scalaire. Soient $f, g \in E$, et soient M_1, M_2 des majorants respectifs de $|f|$ et $|g|$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2,$$

et

$$|\lambda f(x)| \leq |\lambda| M_1.$$

Ainsi, $f + g$ et λf sont elles aussi bornées, et V_1 est un sous-espace vectoriel de E .

8. V_2 : l'ensemble des fonctions majorées.

Non, considérons la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -|x|.$$

Alors f est majorée (par 0). Mais on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-f(x) = |x|.$$

Ainsi, la fonction $-f$ n'est pas majorée. On a donc $f \in V_2$ et $-f \notin V_2$, ce qui montre que V_2 n'est pas un espace vectoriel de E .

9. V_3 : l'ensemble des fonctions paires.

Oui, prenons f et g deux fonctions paires et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$

et

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x).$$

Ainsi, $f + g$ et λf sont paires, et V_3 est un sous-espace vectoriel de E .

Solution exercice n° : 2 Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :

1. Soit $u = (1, 2, 3)$. L'espace vectoriel engendré par u est la droite vectorielle passant par l'origine et dirigée par u . Tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartenant à cet espace s'écrit :

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cela équivaut à

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

Donc l'espace engendré par u est défini par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0, 3x - z = 0\}.$$

2. $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$

Un vecteur (x, y, z) appartient à l'espace engendré par u_1 et u_2 s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda(1, 2, 3) + \mu(-1, 0, 1) \\ &\Rightarrow (x, y, z) = (\lambda - \mu, 2\lambda, 3\lambda + \mu) \end{aligned}$$

Donc on résout

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{y}{2} \\ \mu = \frac{y}{2} - x \\ z = 3 \cdot \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2} - x\right) \end{cases} \Rightarrow z = 2y - x$$

Donc l'espace vectoriel est défini par :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2y - x\}.$$

Solution exercice n° : 3

1. F est défini par une seule équation linéaire, donc c'est un sous-espace de dimension 2. G est défini par deux équations indépendantes, donc c'est un sous-espace de dimension 1. Pour montrer que $F + G$ est une somme directe, il suffit de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. On cherche les vecteurs $v = (x, y, z) \in F \cap G$ vérifiant les trois équations suivantes

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

De la troisième équation, on a $x = 2y + z$. On remplace dans la première équation, on trouve

$$(2y + z) + 2y + z = 0 \Rightarrow 4y + 2z = 0 \Rightarrow 2y + z = 0 \Rightarrow z = -2y$$

Comme $x = 2y + (-2y) = 0$, on trouve $x = 0$, $z = -2y$, donc le vecteur est

$$v = (0, y, -2y) = y(0, 1, -2)$$

Par suite, $F \cap G$ est une droite et donc F et G ne sont pas en somme directe.

2. F est de dimension 2, car une seule équation. G est de dimension 1, car deux équations linéaires indépendantes. On cherche $v = (x, y, z) \in F \cap G$, vérifiant

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

De la troisième équation, on a $x = 2y + z$. En remplaçant dans la première équation, on trouve

$$(2y + z) + y + 2z = 0 \Rightarrow 3y + 3z = 0 \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow z = -y$$

Donc $x = 2y + (-y) = y$. Ainsi, on a $v = (y, y, -y) = y(1, 1, -1) \Rightarrow F \cap G$ est une droite. Par suite, $F \cap G \neq \{0\}$, donc la somme n'est pas directe.

Solution exercice n° : 4

1. (a) Dans $\mathbb{R}^2 : \{(1, 2), (3, 5)\}$, vérifions s'il existe des scalaires λ_1, λ_2 non tous nuls tels que :

$$\lambda_1(1, 2) + \lambda_2(3, 5) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système, nous obtenons de la première équation $\lambda_1 = -3\lambda_2$. En remplaçant dans la deuxième équation, nous trouvons $-6\lambda_2 + 5\lambda_2 = -\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Ainsi, la famille est **libre**.

- (b) Dans $\mathbb{R}^3 : \{(1, 2, 3), (1, -2, -3), (1, 4, 3)\}$. Soient λ_1, λ_2 et λ_3 non tous nuls tels que

$$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(1, -2, -3) + \lambda_3(1, 4, 3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions non triviales $\Rightarrow$ la famille est **liée**.

- (c) Dans $\mathbb{R}^4 : \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 2, 2, 2), (1, 1, 1, 0)\}$ Remarquons que le vecteur $(0, 2, 2, 2) = 2 \times (0, 1, 1, 1)$, donc dépendant des autres. De plus, on peut vérifier que

$$(1, 1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0) + (0, 1, 1, 1).$$

Donc au moins un vecteur est combinaison linéaire des autres. Ainsi, la famille est **liée**.

2. (a) Dans $\mathbb{R}^3$: $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$, ces deux vecteurs sont dans le plan $z = 0$ donc ils engendrent un sous-espace de dimension 2. Or $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Ainsi, la famille n'est **pas génératrice** de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Dans $\mathbb{R}^4$: $\{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$. Regardons si ces 4 vecteurs engendrent $\mathbb{R}^4$: Si les 4 vecteurs sont linéairement indépendants, alors ils forment une base. Vérifions que ce n'est pas le cas : En effet, remarquons que $(0, 0, 0, 1)$ est déjà dans la famille et que $(1, 0, 0, 1) - (0, 0, 0, 1) = (1, 0, 0, 0)$. Et comme

$$(1, 1, 1, 0) - (1, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$$

, alors on peut reconstruire la base canonique

$$((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$$

Ainsi, la famille est **génératrice** de $\mathbb{R}^4$.

Solution exercice n° : 5

1. On considère la famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (1, 1, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 1), \quad v_3 = (1, -1, 1)\}$$

Pour montrer que cette famille forme une base, il suffit de montrer qu'elle est libre (et contient 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$). On forme le déterminant de la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Le déterminant est non nul, donc les vecteurs sont linéairement indépendants.

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est libre et contient 3 vecteurs $\rightarrow$ c'est une **base de** $\mathbb{R}^3$.

2. Pour déterminer les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base, on cherche les réels α, β, γ vérifiant

$$\alpha(1, 1, -1) + \beta(-1, 1, 1) + \gamma(1, -1, 1) = (2, 1, 3)$$

On écrit le système :

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta - \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases}$$

Résolvons ce système : Nous Ajoutons les deux premières équations dans une première étape, nous trouvons

$$(\alpha - \beta + \gamma) + (\alpha + \beta - \gamma) = 2 + 1 \Rightarrow 2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

En utilisant la première équation, nous obtenons

$$\frac{3}{2} - \beta + \gamma = 2 \Rightarrow -\beta + \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \beta + \frac{1}{2}$$

En utilisant la troisième équation, nous trouvons

$$-\frac{3}{2} + \beta + \gamma = 3 \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{9}{2}$$

Remplaçons $\gamma = \beta + \frac{1}{2}$, il résulte que

$$\beta + \beta + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2\beta = 4 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \gamma = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Ainsi, les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans la base $\mathcal{F}$ sont :

$$\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$$

Solution exercice n° : 6

1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs :

$$E = \text{Vect} \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (5, 3, -2)\}$$

Pour déterminer la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs, on examine la dépendance linéaire entre v_1, v_2 et v_3 . Pour cela, nous formons une matrice dont les lignes sont les vecteurs

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

On effectue le **pivot de Gauss** pour déterminer le rang :

On garde L_1 tel quel. Puis on élimine la première colonne de L_3 :

$$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 = (5, 3, -2) - 5(1, 1, 0) = (0, -2, -2)$$

La matrice devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Puis on élimine la 2e entrée de L_3 :

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 = (0, -2, -2) + 2(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

On obtient une matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang est donc 2, ce qui signifie que la famille contient 2 vecteurs linéairement indépendants.

Ainsi, la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille est : 2

2. On cherche les réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

En exprimant λ et μ en fonction de x, y, z , on trouve

$$\lambda = x, \quad \mu = z, \quad y = \lambda + \mu = x + z \Rightarrow \boxed{y = x + z}$$

Ainsi, le vecteur $v = (x, y, z)$ appartient à E si et seulement si :

$$\boxed{y = x + z}$$

Solution exercice n° : 7

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}, \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

Pour l'étude de l'ensemble E , nous résolvons l'équation $3x - 2y + z = 0$. Soient $y = s$ et $z = t$, alors

$$3x - 2s + t = 0 \Rightarrow x = \frac{2s - t}{3}$$

Donc tout vecteur de E s'écrit :

$$(x, y, z) = \left(\frac{2s - t}{3}, s, t\right) = s \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right) + t \left(-\frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

Ainsi,

$$E = \text{Vect} \left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, 0, 1\right) \right\}$$

Pour l'étude de l'ensemble F , nous considérons l'équation $x - y = 0$ qui donne $x = y$. Soit $y = s$ et $z = t$, alors

$$(x, y, z) = (s, s, t) = s(1, 1, 0) + t(0, 0, 1) \Rightarrow F = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Ainsi, E et F sont des espaces vectoriels car ce sont des ensembles de combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Comme chacun des ensembles E et F est engendré par deux vecteurs linéairement indépendants, on a

$$\boxed{\dim(E) = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(F) = 2}$$

3. Pour déterminer $E \cap F$, nous cherchons les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

De la 2ème équation, on a $\Rightarrow x = y \Rightarrow 3x - 2x + z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x$.

Ainsi, un vecteur $v \in E \cap F$ s'écrit

$$(x, x, -x) = x(1, 1, -1) \Rightarrow E \cap F = \text{Vect}\{(1, 1, -1)\}$$

Donc,

$$\boxed{E \cap F = \text{Vect}\{(1, 1, -1)\}} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(E \cap F) = 1}$$

Solution exercice n° : 8

Soient

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \right\}, \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

et les vecteurs $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

1. Chaque ensemble est défini comme l'ensemble des solutions d'un ou plusieurs systèmes d'équations linéaires homogènes. Ces ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Pour déterminer une famille génératrice de E et montrer que c'est une base, nous résolvons le système

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

Par substitution de la première équation, on a $x = -y + 2z$. En remplaçant dans la deuxième équation, on trouve

$$2(-y + 2z) - y - z = -2y + 4z - y - z = -3y + 3z = 0 \Rightarrow y = z$$

Donc $x = -y + 2y = y$. Ainsi, tout vecteur de E s'écrit $(y, y, y) = y(1, 1, 1) \Rightarrow E = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$. Donc $\{a\}$ est une base de E , et $\dim(E) = 1$.

3. On a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\} \Rightarrow z = x + y$.

Soit $x = \lambda, y = \mu$, alors $z = \lambda + \mu$, donc

$$(x, y, z) = (\lambda, \mu, \lambda + \mu) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 1) \Rightarrow F = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} = \text{Vect}\{b, c\}.$$

De plus, b et c sont clairement linéairement indépendants $\Rightarrow \{b, c\}$ est une base de F .

4. Soit $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \Rightarrow \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$ nous calculons

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

De la première équation, on a $\beta = -\alpha$ et de la deuxième équation, on a $\gamma = -\alpha$
 $\Rightarrow \alpha - \alpha - \alpha = 0 \Rightarrow -\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \gamma = 0$ Ainsi, les trois vecteurs sont linéairement indépendants. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. On a

$$\dim(E) = 1, \quad \dim(F) = 2, \quad \dim(E) + \dim(F) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

et $E \cap F = \{0\}$ car $a \in E \setminus F$, et $a \notin F$ (car $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$), donc

$$\boxed{E \oplus F = \mathbb{R}^3}$$

6. Pour exprimer $u = (x, y, z)$ dans la base $\{a, b, c\}$, on cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1).$$

Alors,

$$(x, y, z) = (\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha + \gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

On soustrait la première et la deuxième équations de la troisième équation

$$(z - x - y) = \alpha + \beta + \gamma - \alpha - \beta - \alpha - \gamma = -\alpha \Rightarrow \alpha = x + y - z$$

Puis, on trouve

$$\beta = x - \alpha = x - (x + y - z) = z - y \quad \gamma = y - \alpha = y - (x + y - z) = z - x$$

Ainsi,

$$\boxed{(x, y, z) = (x + y - z)a + (z - y)b + (z - x)c}$$