

Chapitre 0

I.N.S.A.T

Année universitaire : 2018/2019

SERIE 1
ALGÈBRE

M.Errokh

Section : MPI

Septembre 2018

Exercice 1 :

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. f n'est pas une fonction constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeurs.
5. La fonction f présente un minimum.
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 2 :

Soient P et Q deux propositions dépendantes de x et y .

Donner la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \exists y \text{ tel que } P \cap Q \text{ est vrai.}$$

Exercice 3 :

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I |f(x)| \leq M$.
4. $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
5. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Exercice 4 :

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E . Déterminer les ensembles suivantes :

1. Montrer que $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. f injective
2. Montrer que $\forall B, B' \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
3. Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$ et $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$. f surj

f inj

Exercice 10 :

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que f est injective si, et seulement si,

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

2. Montrer que

a) f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.

b) f est surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

3. Montrer que f est bijective si, et seulement si,

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f(C_E A) = C_F f(A).$$

$$C_E^A$$

$$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$$

Exercice 11 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, 2)$.

Exercice 12 :

Dans $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit la relation

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow xy' = x'y$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $\overline{(x, y)}$. L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ est noté $\mathbb{Q}$ et (x, y) est noté $\frac{x}{y}$.



1. $(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$.
2. $(A^c \cap B)^c \cap (A \cap B)^c$.
3. $(A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup [(A^c \cup B) \cap (A \cup C)]^c$.

Exercice 5 :

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E . Montrer que :

1. $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.
2. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap B^c = A \cap C^c$
3. $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$.

Exercice 6 :

Montrer que :

i) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

ii)
$$\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Rightarrow B = C$$

iii) $(A \cup B) \Delta (A \cup C) = A^c \cap (B \Delta C)$

Exercice 7 :

Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g .
2. a) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
b) Étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 8 :

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Établir les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

Exercice 9 :

Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

$$f \text{ bij} \Rightarrow f \circ g \text{ bij}$$

$$f \cup g \in f(A) \Rightarrow x \in A$$

$$A \cap B$$

$$A \cap C \Rightarrow A \cap B \cap C$$

$$f(A) \cap f(B) \Rightarrow f(A \cap B)$$

Exercice 1:

* un intervalle: Collect° des nbre coniques entre 2 bornes (bornes infé et borne sup) tq tous nbre conique entre ces deux bornes appartiennent à cet intervalle.

* non vide: contient au moins un nombre

* fonction: c'est une opération entre deux ensemble (un ensemb de départ et un autre d'arrivée) qui vérifie à chaque élément de l'ensemble de départ au plus un élément de l'ensemble d'arrivée

∃ : existe
∈ : app
! : tq
∀ : qd soit
! : un unique

1) $\exists x \in \mathbb{I} \mid f(x) = 0$

2) $\forall x \in \mathbb{I}, f(x) = 0$

3) $\exists x, y \in \mathbb{I} \mid f(x) \neq f(y)$
 $x \neq y$

4) $\forall x, y \in \mathbb{I} \mid f(x) \neq f(y)$
 $x \neq y$

5) $\exists m \in \mathbb{I} \mid \forall x \in \mathbb{I} : f(x) \geq f(m)$

6) $\forall m \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{I} \mid f(z) > m$

7) $\exists ! x \in \mathbb{I} \mid f(x) = 0$

Si non $\exists x, y \in \mathbb{I} \mid f(x) = 0 \text{ et } f(y) = 0$
 $\Rightarrow x = y$

Exercice 3:

- Soit P une assertion:

la négation de P notée ($\bar{P}$, $\neg P$, $\neg P$).

c'est une assertion fausse si P est vrai

$P: "x \geq 0" \Rightarrow \neg P: "x \leq 0"$

1) $\forall x \in \mathbb{I}, f(x) \neq 0$

$\exists x \in \mathbb{I}, f(x) = 0$

2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{I} \mid f(x) = y$

$\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{I}, f(x) = y$

3) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{I} \mid |f(x)| \leq M$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{I} \mid |f(x)| > M$

4) $\forall x, y \in \mathbb{I}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$\exists x, y \in \mathbb{I} \mid x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
($\neg$ croissante $\neq$ décroissante)

5) $\forall x, y \in \mathbb{I}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\exists x, y \in \mathbb{I} \mid f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$

6) $\forall x \in \mathbb{I}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$

$\exists x \in \mathbb{I} \mid f(x) > 0 \text{ et } x > 0$

Exercice 2:

$\forall x \exists y \mid P \wedge Q$ est vrai

$\exists x \forall y \mid \neg P \vee \neg Q$ est vrai
 $P \wedge Q$ est faux

n : et
ou : ou
 $\neg$: non

Exercice 4:

E: un ensemble / $\mathcal{P}(E)$: l'ensemble des parties de E
(cà d: tous les sous ensemble de l'ensemble E)

$A, B \in \mathcal{P}(E)$

1) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B$

$= (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

$= B \cap (A \cup A^c)$

$= B \cap E$

$= B$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Loi de Morgan:

$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $\overline{(A \cap B)} \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$

$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

$= \bar{B}$

$= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap \bar{B})$

$= \bar{B} \cup (A \cap \bar{A})$

$= \bar{B} \cup \emptyset$

$= \bar{B}$

3) $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) \cup [(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup C)]$

$= (A \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup \{(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup C)\}$

$= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cup B) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (A \cap C)$

$= (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (A \cap C)$

$= A \cup \bar{A}$

$= E$

Exercice 5:

1) Hyp: $A \cap B = A \cup B$

Hq: $A \subseteq B$ $\swarrow$ ACB $\searrow$ BCA

Hq: $A \subseteq B$:

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$

~~Donc~~ ACB

2) Hq BCA?

Soit $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$
 $\Rightarrow x \in A \cap B$
 $\Rightarrow x \in A$

Donc : $B \subset A$

CP: $A = B$

2) $\Rightarrow$ Hq $(A \cap \bar{B}) \subset (A \cap \bar{C})$

Soit $x \in A \cap \bar{B}$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin A \cap B$ Hyp

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin A \cap C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in \bar{C}$

$\Rightarrow x \in A \cap \bar{C}$ Donc $A \cap \bar{B} \subset A \cap \bar{C}$ ②

2) Hq $(A \cap \bar{C}) \subset (A \cap \bar{B})$

Soit $x \in A \cap \bar{C} \Rightarrow x \in A$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

Donc $A \cap \bar{C} \subset A \cap \bar{B}$ ②

① + ② $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

$\Leftarrow$ "H1: m démontrat"

H2: $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

$A \cap E_1 = A \cap E_2$

$\Rightarrow A \cap \bar{E}_1 = A \cap \bar{E}_2 \Rightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$

$\Rightarrow$ H2: $A \cap B = A \cap C \Rightarrow \overline{(A \cap B)} = \overline{(A \cap C)}$

$\Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{C}$

$\Rightarrow A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = A \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$

$\Rightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$

"C" Hq BCC

3) soit $x \in B$

Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in C$

Si $x \notin A \Rightarrow x \in A \Delta B$

$\Rightarrow x \in A \Delta C$

$\Rightarrow x \in C$

Donc : Si $x \in B \Rightarrow x \in C$

$\Rightarrow$ Hq $C \subset B$

Soit $x \in C$

Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in B$

Exercice 6:

1) $(A \cap B) \cap C = (A \cap \bar{B}) \cap C$

$= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$

$= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$

$= A \cap (\overline{B \cup C})$

$= A \cap \bar{(B \cup C)}$

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \end{aligned}$$

$$A \cap B = A \cap \bar{B}$$

Ex1: Soit $a \in E$

D'écrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))) = \{ \dots \}$

Ex2: Soient A et B 2 parties de E

1) Hq $\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B \cap A}$

2) Hq $A \cap B = A \Leftrightarrow B \cap A = B$

3) Hq $A \cap B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

Ex3: Soit $x \in \mathcal{P}(E)$; E un ensemble.

Discuter et résoudre l'équation

$A \cup X = B$ où A et B deux parties connues

1) $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$

$B \subset C$ et $C \subset B$

"C" Hq BCC

Soit $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in C$

Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$; Si $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap C$; OK

$\Rightarrow x \in C$

Donc $B \subset C$

"C" Hq CCB

De la même manière on Hq $C \subset B$

CP $B = C$

iii) $(A \cup B) \Delta (A \cup C) = [(A \cup B) \cap (A \cup C)^c] \cup [(A \cup B)^c \cap (A \cup C)]$

$$= [(A \cup B) \cap (A^c \cap C^c)] \cup [(A^c \cap B^c) \cap (A \cup C)]$$

$$= [(A \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C})] \cup [(\bar{A} \cap \bar{B} \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)]$$

$$= (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$$

$$= \bar{A} \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))$$

$$= \bar{A} \cap (B \Delta C)$$

Exercice 7:

Soient $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $k \mapsto 2k$

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $k \mapsto \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

1) Etudier f :

i) injective?

Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ tq $f(k) = f(k')$

$$\Rightarrow 2k = 2k' \Rightarrow k = k'$$

$\Rightarrow$ Donc f est injective sur $\mathbb{N}$

$f: E \rightarrow F$
 f est injective
 Si: $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
 $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

ii) surjective?

H_1 : $\exists k \in \mathbb{N}$, mais n'admet pas d'antécédent par f

Donc, f n'est pas surjective

H_2 : Soit $k \in \mathbb{N}$; $\exists ? k' \in \mathbb{N}$ tq $k = f(k')$

$$k = f(k') \Rightarrow k = 2k' \Rightarrow k' = \frac{k}{2}$$

n'est pas toujours dans $\mathbb{N}$

Donc f n'est pas surj dans $\mathbb{N}$

iii) bijective?

Comme f n'est pas surject sur $\mathbb{N}$

Donc f n'est pas bijective sur $\mathbb{N}$

f est injective
 Si: $\forall y \in F, \exists ! x \in E$
 $f(x) = y$

f est bijective
 Si: $\forall y \in F, \exists ! x \in E$
 $f(x) = y$
 $\Leftrightarrow$
 f surj + inject

2) Etudier g :

i) injective?

H_1 : $\left. \begin{matrix} g(0) = 0 \\ g(1) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow g$ n'est pas inject sur $\mathbb{N}$

or $1 \neq 0$

H_2 : Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ / $g(k) = g(k')$

si k pair et k' pair $g(k) = g(k')$ $\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k'}{2}$ $k = k'$ g inject sur $2\mathbb{N}$	si k impair et k' impair $g(k) = g(k')$ $\Rightarrow \frac{k-1}{2} = \frac{k'-1}{2}$ $\Rightarrow k-1 = k'-1$ $k = k'$ g est inject sur $\mathbb{N}$	si k pair et k' impair $g(k) = g(k')$ $\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k'-1}{2}$ $k = k'-1$ faux Donc g n'est pas inject sur $\mathbb{N}$
--	---	---

ii) surjective?

Soit $k \in \mathbb{N}$; $\exists ? k' \in \mathbb{N}$ / $g(k') = k$

si k est pair
 Prenons $k' = 2k$
 en g :
 $g(k') = g(2k) = k$

si k impair
 Prenons $k' = 2k+1$
 vérif: $g(k') = g(2k+1) = k$

Donc g est surjective sur $\mathbb{N}$

$\exists \pm$ tq /
 $\forall$ $\pm$
 soit $\pm$

ii) bijective?

Comme g n'est pas inject sur $\mathbb{N}$ donc

g n'est bijective sur $\mathbb{N}$

2) a- $g \circ f = ?$

Comme $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ donc $g \circ f$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$$

$$(g \circ f)(k) = g(f(k)) = g(2k) = \frac{2k}{2} = k$$

Donc: $g \circ f = \text{Id}$

* $f \circ g = ?$

Comme $g(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ donc $f \circ g$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$$

$$f \circ g(k) = f(g(k)) = \begin{cases} f(\frac{k}{2}) & \text{si } k \text{ pair} \\ f(\frac{k-1}{2}) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} k & ; k \text{ pair} \\ k-1 & ; k \text{ impair} \end{cases}$$

b- Etudier $g \circ f$:

D'après a) $g \circ f = \text{Id}$ et Id bijective sur $\mathbb{N}$

Donc: $g \circ f$ est bijective sur $\mathbb{N}$ et par la suite $g \circ f$ inject et surj sur $\mathbb{N}$

Théorème:

$f: E \rightarrow F$
 $\psi: G \rightarrow H$

Si: $E = G$
 $F = H$
 $f(x) = \psi(x), \forall x \in E$

$\Rightarrow f = \psi$

Etudier $g \circ f$??

i) injective ?

$$\left. \begin{array}{l} (f \circ g)(0) = 0 \\ (f \circ g)(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g \text{ n'est pas injective sur } \mathbb{N}$$

ii) surjective ?

On remarque que 3 n'admet pas d'antécédent par $f \circ g$. $f \circ g$ n'est pas surjective sur $\mathbb{N}$

iii) Bijective ?

Comme $f \circ g$ n'est pas surjective sur $\mathbb{N}$
Donc, $f \circ g$ n'est pas biject sur $\mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ bij} \\ g \text{ bij} \end{array} \right\} \not\Rightarrow f \circ g \text{ ou } g \circ f \text{ bij}$$

Exercice 8:

$$\begin{array}{ccc} & E & \xrightarrow{x} F \\ & \uparrow & \\ & G & \xleftarrow{y} \end{array}$$

$$f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$$

① Soient $x, x' \in E$ tq $f(x) = f(x') \dots \Rightarrow x = x'$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$\text{g} \circ \text{f}$$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$

$$\Rightarrow x' = x$$

Donc f est injective sur E

② Soit $z \in G$, $\exists ? y \in F$ / $g(y) = z$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

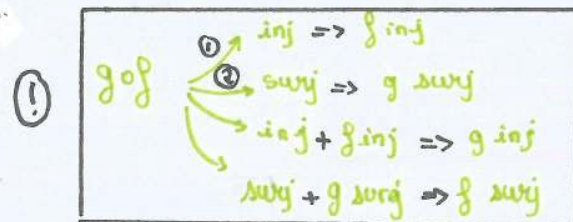
$$\text{g} \circ \text{f}$$

$$z \in G \Rightarrow \exists x \in E / (g \circ f)(x) = z$$

$$\Rightarrow \exists x \in E / g(f(x)) = z$$

$$\Rightarrow \exists y = f(x) \in F / g(y) = z$$

Donc, g est surjective sur G



③ Soient $y, y' \in F$ / $g(y) = g(y')$

$$y \in F \Rightarrow \exists x \in E / y = f(x)$$

$$y' \in F \Rightarrow \exists x' \in E / y' = f(x')$$

$$g(y) = g(y') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x' \xrightarrow{\text{en appl}} f(x) = f(x')$$

$$g \circ f \Rightarrow y = y'$$

④ Soit $y \in F$, $\exists ? x \in E$ / $y = f(x)$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$\text{g} \circ \text{f}$$

$$y \in F \Rightarrow \underbrace{g(y)}_z \in G, \text{ g} \circ \text{f} \text{ surjective}$$

$$\Rightarrow \exists x \in E / (g \circ f)(x) = g(y)$$

$$\Rightarrow \exists x \in E / g(f(x)) = g(y)$$

$$\Rightarrow \exists x \in E / f(x) = y \quad \text{g est inj}$$

Donc f est surjective.

Exercice 9:

① a) $M_q \forall A, A' \in \mathcal{P}(E)$

"C": $M_q \forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$

Soient $A, A' \in \mathcal{P}(E)$

$$\text{Soit } y \in f(A \cup A') \Rightarrow \exists z \in A \cup A' \text{ tq } y = f(z)$$

$$f: E \rightarrow F$$

$$A \in \mathcal{P}(E)$$

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

$$y \in f(A) \Rightarrow \exists z \in A \text{ tq } f(z) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in A \text{ ou } x \in A', y = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x \in A / y = f(x) \text{ ou } \exists x \in A' / y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(A')$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(A')$$

$$\text{Donc, } f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A') \quad \text{①}$$

"S": ... $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$

$$\text{On a } A \subset A \cup A' \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup A')$$

$$A' \subset A \cup A' \Rightarrow f(A') \subset f(A \cup A')$$

$$\text{Donc } f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A') \quad \text{②}$$

$$\Rightarrow \text{CP } f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$$

$$* f(x) \in f(A) \not\Rightarrow x \in A$$

$$* \begin{cases} A \subset B \\ A \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset B \cap C$$

ssi: $A \cap C \neq \emptyset$

Mais

$$f(A) \subset f(B) \Rightarrow f(A) \subset f(B) \cap f(C)$$

$$f(A) \subset f(C) \quad \text{Tjrs vrai}$$

② @ $\forall B, B' \in \mathcal{P}(F) \mid f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

$A \in \mathcal{P}(E)$	$B \in \mathcal{P}(F)$
$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$	$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$
$\forall y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A$ $\text{tq } f(x) = y$	$a \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(a) \in B, a \in E$

* c", $f^{-1}(B \cup B') \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$:

Soient $B, B' \in \mathcal{P}(F)$
 Soit $x \in f^{-1}(B \cup B') \Rightarrow f(x) \in B \cup B'$
 $\Rightarrow f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B'$
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B')$
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
 Donc $f^{-1}(B \cup B') \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ ①

* c", $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cup B')$:

Soient $B, B' \in \mathcal{P}(F)$
 On a, $B \subset B \cup B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B \cup B')$
 $B' \subset B \cup B' \Rightarrow f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cup B')$
 Donc $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cup B')$ ②

> CP: $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

③ $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Soient $B, B' \in \mathcal{P}(F)$
 Soit $x \in f^{-1}(B \cap B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cap B'$
 $\Leftrightarrow f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B'$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \text{ et } x \in f^{-1}(B')$
 $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

$\Rightarrow$ CP $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

③ @ $A \subset f^{-1}f(A)$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$
 Soit $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$
 Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$

⑥ $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Soit $B \in \mathcal{P}(F)$
 Soit $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) \mid y = f(x)$
 Donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Exercice 11:

Theor: $f: E \rightarrow F$ app

$I \subset \mathbb{N}, J \subset \mathbb{N}$

① si $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)$

$f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

$f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

② si $(B_j)_{j \in J} \in \mathcal{P}(F)$

$f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

$f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

1) Soit $E = \mathbb{R}^2$

$(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$

Soit E ensemble
 Soit R une relat° binaire sur E
 On dit que R est une relat° d'équivalence sur E si:

Reflexive $\forall x \in E, x R x$	Symétrique $\forall x, y \in E; x R y \Leftrightarrow y R x$	Transitive $\forall x, y, z \in E; \{x R y, y R z\} \Rightarrow x R z$
---------------------------------------	---	---

c) Mq R est réflexive sur E:

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x, y) R (x, y)$

2) Mq R est asymétrique sur E:

Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
 $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$
 $\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow (x', y') R (x, y)$
 Donc R est symétrique sur E

3) Mq R est transitive sur E:

Soient $(x, y), (x', y')$ et $(x'', y'') \in \mathbb{R}^2$
 tq $\begin{cases} (x, y) R (x', y') \\ (x', y') R (x'', y'') \end{cases}$
 On a $\begin{cases} (x, y) R (x', y') \\ (x', y') R (x'', y'') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \\ x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x''^2 + y''^2$$

$$\Rightarrow (x, y) R (x'', y'')$$

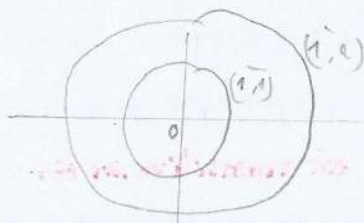
Donc: R est transitive sur $\mathbb{R}^2$

CP: R est une relat° d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \overline{(0,0)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) R (0,0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \\ &= \{(0,0)\} = \theta(0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(1,1)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) R (1,1)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\} \\ &= \mathcal{C}(0,0, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(1,2)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\} \\ &= \mathcal{C}(0,0, \sqrt{5}) \end{aligned}$$



$$\frac{\mathbb{R}^2}{R} = \{ \mathcal{C}(0,0, R) \mid R \geq 0 \} : \text{ensemble des classes d'équivalence}$$

Exercice 12:

① Hq: R eq sur E :

i) Ref: $(\forall x \in E, x R x)$

$$\text{Soit } (x, y) \in E$$

$$\text{on a } xy = xy \Rightarrow (x, y) R (x, y)$$

Donc, R est réflexif

ii) Sym: $(\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow y R x)$

$$\text{Soient } (x, y), (x', y') \in E \text{ tq } (x, y) R (x', y')$$

$$(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow xy' = x'y$$

$$\Leftrightarrow (x', y') R (x, y)$$

Donc, R est symétrique sur E

iii) trans:

$$xy' = x'y \Rightarrow xy'y'' = x'y'y''$$

$$= yx'y''$$

$$xy'y'' = yx''y'$$

$$xy'' = yx''$$

Donc

$$\Rightarrow (x, y) R (x'', y'')$$

CP: R est une relat° d'eq sur E

②

Soit $(x, y) \in E$

$$\overline{(x, y)} = \{(x', y') \in E \mid (x, y) R (x', y')\}$$

$$= \{(x', y') \in E \mid xy' = x'y\}$$

$$= \{(x', y') \in E \mid \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Exple: } \overline{(0,1)} &= \{(x', y') \in E \mid \frac{x'}{y'} = 0\} \\ &= \{(0, y') \mid y' \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(1,1)} &= \{(x', y') \in E \mid \frac{x'}{y'} = 1\} \\ &= \{(x', x') \mid x' \in \mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(1,2)} &= \{(x', y') \in E \mid \frac{x'}{y'} = \frac{1}{2}\} \\ &= \{(x', 2x') \mid x' \in \mathbb{Z}^*\} \\ &= \{(1,2), (2,4), \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E/R &= \{ \overline{(x, y)} \mid (x, y) \in E \} \\ &= \{(x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ tq } \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}\} \\ &= \textcircled{1} \end{aligned}$$