

Quelques notions de base

Déf: Un ensemble est une collection d'objets présentant une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer qu'un objet appartient ou non à cet ensemble.

• Si un objet x appartient à un ensemble donné E , on dit aussi que x est un élément de E et on note $x \in E$.

Rq: si x n'appartient pas à E on notera $x \notin E$.

Déf: (Inclusion)

• Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si tout élément de E est élément de F .

$E \subset F$ sig $\forall x \in E \Rightarrow x \in F$

Vocab: Si $E \subset F$ on dit aussi que E est une partie de F ou que E est un sous-ensemble de F .

• Etant donné un ensemble E ; l'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exp: soit $E = \{a, b\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a, b\} \}$$

(singulier) (paire)

ex: si card $E = n$
 $\Rightarrow$ card $\mathcal{P}(E) = 2^n$

$$ACE \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$$

$$a \in \{a, b\}; \{a\} \subset \{a, b\}$$

Déf: (égalité)

• Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont égaux et on note $E = F$.

Si E ont exactement les n éléments;

$$E = F \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$$

Déf: (Intersection)

• Soient E un ensemble et A et B deux parties de E .

On appelle intersection de A et B la partie de E notée $A \cap B$ définie par:

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$



Rq: Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont disjointes.

Déf: (réunion)

• Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . On appelle réunion de A et B la partie de E notée

$A \cup B$ définie par:



$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$Rq: (A \cap B) \subset (A \cup B);$$

$$A \subset (A \cup B);$$

$$B \subset (A \cup B);$$

$$(A \cap B) \subset A;$$

$$(A \cap B) \subset B;$$

Déf: (Complémentaires)

• Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle complémentaire de A dans E noté

$${}^E C A \text{ ou } A^c \text{ ou } \bar{A}$$



$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

Déf: (différence)

• Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . On appelle différence de A et B la partie de E notée $A \setminus B$ définie par:

$$A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$$\Rightarrow A \setminus B$$



Rq: On peut définir de façon analogue la partie $B \setminus A$.

Déf: (différence symétrique)

Soient E un ensemble et A et $B \in \mathcal{P}(E)$. On appelle différence symétrique de A et B la partie de E notée $A \Delta B$ définie par:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

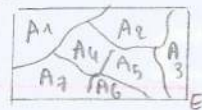


21080996

Def: (partition)

Soient E un ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que la famille $\{A_i\}_{i \in I}$ forme une partition de E si :



1- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$

2- $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

3- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

Exple: Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$
 $\bar{A}$ et A forment une partition de E

Exercice:

Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

Pq:

• $A \cap B = B \cap A$

• $A \cup B = B \cup A$

• $A \cap A = A$

• $A \cup A = A$

• $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

• $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

• $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

• $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

• $\bar{\bar{A}} = A$

• $\bar{E} = \emptyset$

• $(A \cap B) \subset A$

• $(A \cap B) \subset B$

• $A \subset (A \cup B)$

① $\begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{cases}$

Def: (Produit cartésien)

Le produit cartésien de 2 ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) tq $x \in E$ et $y \in F$

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

D'une façon générale, soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles avec $n \geq 2$.

Le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_n$ est l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ou $\prod_{i=1}^n E_i$

est l'ensemble de n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tq $x_i \in E_i \quad ; \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in E_i \quad \forall 1 \leq i \leq n\}$$

Rq: Si $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$

$$\prod_{i=1}^n E_i = \prod_{i=1}^n E = E^n$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad \forall 1 \leq i \leq n\}$$

Rq: $(a, b) \neq \{a, b\}$
couple $\neq$ paire

Def: (égalité)

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Dans $\mathbb{R}^n$: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Def: (application)

L'application est la donnée d'un ensemble de départ E , d'un ensemble d'arrivée F et d'une relation f permettant d'associer à tout élément de E un unique élément y de F .

Cet unique élément y s'appelle image de x par f noté $f(x)$.

$$f: E \rightarrow F$$
$$x \mapsto f(x)$$

L'ensemble des applications d'un ensemble E dans un ensemble F sera noté: $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

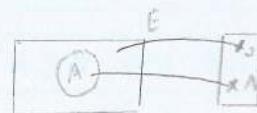
* Soit E un ensemble

$$\text{id}_E: E \rightarrow E$$
$$x \mapsto x$$

* $\gamma_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

* Soit $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\chi_A: E \rightarrow \{0, 1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$



χ_A s'appelle l'application caractéristique de la partie A.

Exp: Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$
Montrer $A \subset B \iff \chi_A \leq \chi_B$

① Dédurre $A = B \iff \chi_A = \chi_B$

Injections, Surjections, Bijections:

Def: (Injection) départ → arrive

Une application f de E dans F est dite injective si: $\forall x, x' \in E$ $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Pratiquement:

f injective si: $\forall x, x' \in E$ $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

exp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 8x - 9$

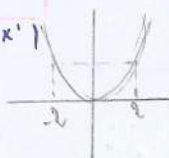
$\forall x, x' \in \mathbb{R} : f(x) = f(x')$
 $8x - 9 = 8x' - 9$
 $8x = 8x'$
 $x = x' \Rightarrow$ Donc f injective

$$N(P \Rightarrow Q) = P \vee \neg Q$$



② $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

$\exists x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x'$ et $g(x) = g(x')$
 $2 \neq -2$ mais $g(2) = g(-2) = 4$



Def: (Surjections) arrive → départ

Une application f de E dans F est dite surjective (ou que c'est une surjection) si: $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

exp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 8x - 9$

Soit $y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$

Soit $y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x) = 8x - 9$

alors $x = \frac{y+9}{8} \Rightarrow$ Donc f surjective



Def: (bijection)

Une application f de $E \rightarrow F$ est dite bijective (ou que c'est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective.

$$f \text{ bij} \iff \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases} \iff \forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

Rq: Lorsque f est bijective de E dans F alors elle possède une application réciproque notée f^{-1} :

$$f^{-1}: F \rightarrow E$$

$$y \mapsto f^{-1}(y)$$

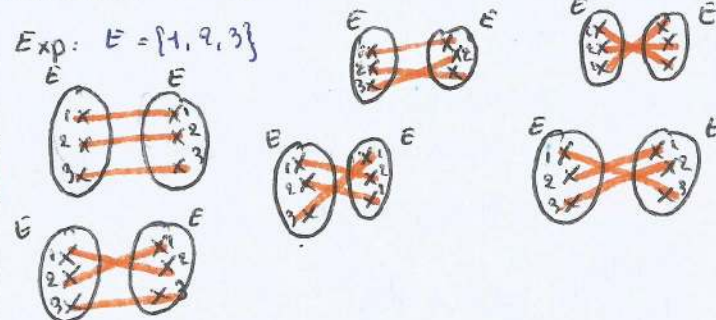
- $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$
- f^{-1} est aussi bij et $(f^{-1})^{-1} = f$

Vocab et notation:

Une bijection d'un ensemble E dans lui-même se dit permutation de E .

L'ensemble des permutations de E se note $\text{Bij}(E)$

Exp: $E = \{1, 2, 3\}$



Exercice:

Si $\text{card } E = n$ alors $\text{card } \text{Bij}(E) = n!$

Image directe, Image réciproque

Défs:

Soit f une application de E dans F

1) Si $A \subset E$, on appelle image de la partie A par f la partie de F notée $f(A)$ définie par:

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A, y = f(a)\}$$

$$= \{f(a) \mid a \in A\}$$



2) Si $B \subset F$, on appelle image réciproque de B la partie de E notée $f^{-1}(B)$ définie par:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Rq: f^{-1} est une notation, aucune relation avec l'application réciproque (Khater Golbach bij)

$$\textcircled{!} \quad x \in f^{-1}(B) \iff \begin{cases} x \in E \\ f(x) \in B \end{cases}$$

Exercice : Soit f une application de E dans F
 f est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$

Déf. Soit R une relation binaire dans un ensemble E . On dit que R est :

- 1- reflexive : $\forall x \in E; x R x$
- 2- symétrique : $\forall x, y \in E; x R y \Rightarrow y R x$
- 3- antisymétrique : $\forall x, y \in E \begin{cases} x R y \\ y R x \end{cases} \Rightarrow x = y$
 exp: Soit X un ensemble et $P(X)$ l'ensemble des parties de X .
 $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$
 $A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A = B$
 La relation inclus " $\subset$ " est antisymétrique
 " " $\leq$ " dans R est une relation antisymétrique

4- transitive : si $\forall x, y, z \in E$
 $\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$

Déf.
 On dit qu'une relation binaire dans un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est reflexive, symétrique et transitive "égalité"

Déf.
 On dit qu'une relation binaire R dans un ensemble E est une relation d'ordre si elle est reflexive, antisymétrique et transitive.
 exp: " $\leq$ " est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$
 " " $\subset$ " " " " " dans $P(X)$ où X est un ensemble qq

Déf.
 Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence R . Pour $\forall x \in E$, on définit la classe d'équivalence de x (modulo R)

$C_R(x) = \{y \in E / x R y\}$ $\Rightarrow$ ensemble de pt

Notation: On peut noter $\bar{x}, \hat{x}, \check{x}, \dots$
 • la classe d'un élément n'est jamais vide

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence R .

$\forall x, y \in E. \boxed{x R y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}}$ = m classe

Démonstration:

" $\Rightarrow$ " Supp $x R y$ montrons que $\bar{x} = \bar{y}$

Soit $z \in \bar{x}$ donc $z R x$
 $\begin{cases} z R x \\ x R y \end{cases} \Rightarrow$ D'après la transitivité on peut dire que c'est une relat° d'équivalence
 $z R y$
 Donc $z \in \bar{y}$
 Donc $\bar{x} \subset \bar{y}$. De m° on montre que $\bar{y} \subset \bar{x}$
 Ainsi: $\bar{x} = \bar{y}$

" $\Leftarrow$ " Supp $\bar{x} = \bar{y}$ montrons que $x R y$
 $x \in \bar{x} = \bar{y}$ donc $x \in \bar{y}$ donc $x R y$

Vocab: Si E est muni d'une relation d'ordre R on écrit (E, R) est un ensemble ordonné.

Déf.
 On dit qu'une relat° d'ordre R sur un ensemble E est totale si $\forall x, y \in E, x R y$ ou $y R x$
 Dans le cas contraire, on dit qu'elle est partielle

Déf.
 Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence R . On appelle ensemble quotient de E par R noté E/R
 $E/R = \{C_R(x); x \in E\}$

Remarque: Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble E

Déf.
 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné noté $(E, \leq)$, muni d'une relat° d'ordre

- A une partie de E et $a \in E$.
- On dit que a est un majorant (respectivement minorant) de la partie A si $\forall x \in A, x \leq a$ (respect $\forall x \in A, a \leq x$)
- On dit que A est majorée (respect minorée) si elle possède un majorant (respect minorant)

① On dit qu'un élément β de E le plus grand élément (resp le plus élément) de A

$$\text{si } \begin{cases} \beta \in A \\ \beta \text{ majoré} \end{cases} \quad \left(\text{resp } \begin{cases} \beta \in A \\ \beta \text{ minoré} \end{cases} \right)$$

Remarque:

Toute partie non vide M possède un plus petit élément.

f^{-1}