

Les Polynômes

• Définition : Polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$ est une expression de forme :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad i \in \mathbb{N},$$

$n = d^{\circ} P = \deg(P)$, a_i : coefficient de x^i , $a_i \in \mathbb{K}$

• $a_n x^n$: le monôme de plus haut degré

• a_n : coefficient dominant.

• Si $P(x) = 0$ alors P est un polynôme nul

• $P(x) = 3$: polynôme constant $\downarrow$
 $\deg(P) = 0$ $\deg(P) = -\infty$ (convention)

• $P(x) = x^2$: monôme de ($d^{\circ}(P) = 2$)

• $P(x) = x^3 + 4x^2$: binôme ($\deg(P) = 3$)

• $P(x) = x^3 + 4x^2 + 1$: trinôme ($\deg(P) = 3$)

• Si $\deg(P) = 1 \Rightarrow P$ est un polynôme linéaire.

• Autres formes d'un polynôme :

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x+5)x^2$$

• Opération sur les polynômes :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i,$$

$$P(x) \in \mathbb{K}[x], \quad Q(x) \in \mathbb{K}_m[x]$$

$$\mathbb{K}[x] = \left\{ \text{l'ensemble des polynômes à coefficients dans } \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathbb{K}_m[x] = \left\{ P \in \mathbb{K}[x] \mid d^{\circ} P \leq m \right\}$$

* Somme de 2 polynômes :

$$\begin{aligned} (P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ &= \sum_{i=0}^r (a_i + b_i) x^i \end{aligned}$$

• Si $m \neq n \Rightarrow r = \max(m, n)$

• Si $m = n \Rightarrow r \leq n$

Propriétés :

- commutative
- Associative
- possède un élément neutre (polynôme nul) $0_{\mathbb{K}[x]} = (0, 0, \dots, 0)$
- est une LCI dans $\mathbb{K}[x]$
- possède un opposé : ainsi : $(\mathbb{K}[x], +)$ est un groupe abélien

* Multiplication d'un polynôme par un scalaire (multiplication externe)

$$\alpha \cdot P(x) = (\alpha P)(x)$$

Propriétés :

- + $\alpha(\beta \cdot P)(x) = (\alpha \cdot \beta) P(x)$
- + $\alpha(P+Q)(x) = \alpha \cdot P(x) + \alpha \cdot Q(x)$
- + $(\alpha + \beta) Q(x) = \alpha Q(x) + \beta Q(x)$
- * $1 \cdot P(x) = P(x)$

* Multiplication de 2 polynômes :

$$\mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$$

$$P \cdot Q \longmapsto P \cdot Q$$

$$\text{ona: } \left. \begin{array}{l} d^{\circ} P = m \\ d^{\circ} Q = n \end{array} \right\} \Rightarrow d^{\circ} P \cdot Q = m + n$$

et ona :

$$\begin{aligned} (P \cdot Q)(x) &= \left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \left(\sum_{i=0}^n b_i x^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^i a_j \cdot b_{i-j} \right) x^i \end{aligned}$$

Propriétés :

- commutative
- Associative
- Distributivité $\times$ à +
- possède un élément neutre ($P(x) = 1$) $\hookrightarrow 1_{\mathbb{K}[x]} = (1, 0, 0, \dots)$
- est une LCI dans $\mathbb{K}[x]$

Vocabulaire :

$$P \text{ est } \underline{\text{unitaire}} \iff a_m = 1$$

• Arithmétique des polynômes :

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[x]$

B divise $A \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[x] / A = BQ$

Un note: $B \mid A$

Propriétés:

① $\underline{\text{Si}} \begin{cases} A \mid B \\ B \mid A \end{cases} \Rightarrow A = B$

② $\underline{\text{Si}} \begin{cases} A \mid B \\ B \mid C \end{cases} \Rightarrow A \mid C$

③ $\underline{\text{Si}} \begin{cases} C \mid A \\ C \mid B \end{cases} \Rightarrow C \mid \lambda A + \mu B$
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}[x]$

Théorème: La division Euclidienne:

Soient $A, B \in \mathbb{K}[x]$ avec B non nul.

Alors, il existe un couple unique

$(Q, R) \in (\mathbb{K}[x])^2$ tq:

$A = BQ + R$, avec $\deg R < \deg B$

quotient reste

Définition: Le PGCD:

Soient $A, B \in \mathbb{K}[x]$ non nuls.

Alors, $\exists ! D \in \mathbb{K}[x]$ vérifiant:

1. D divise A et B

2. $\exists U_1$ et V_1 dans $\mathbb{K}[x]$ tq:

$AU_1 + BV_1 = D$

3. Tout diviseur Δ de A et B divise D .

(qui corollaire ②)

Propriétés:

① $\text{PGCD}(\lambda A, B) = \text{PGCD}(A, \lambda B) = \text{PGCD}(A, B)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
 $\text{et } \forall A, B \in \mathbb{K}[x]$

② $\underline{\text{Si}} A = BQ + R$
 Alors $\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(B, R)$

③ $\underline{\text{Si}} : \text{PGCD}(A, B) = D$
 alors $\text{PGCD}(\lambda A, \lambda B) = \lambda D$

③ (conséquence):

$\text{Si } A \wedge B = 1$

alors $\lambda A \wedge \lambda B = \lambda$

* Algorithme d'Euclide:

Soient $A, B \in \mathbb{K}[x]$ non nuls

Alors: $\exists (Q_1, R_1) \in (\mathbb{K}[x])^2$ tq:

$A = BQ_1 + R_1$

$\exists (Q_2, R_2) \in (\mathbb{K}[x])^2$ tq:

$B = R_1Q_2 + R_2$

$\exists (Q_3, R_3) \in (\mathbb{K}[x])^2$ tq:

$R_1 = R_2Q_3 + R_3$

$\vdots$
 $\exists (Q_{n+1}, R_{n+1}) \in (\mathbb{K}[x])^2$ tq:

$R_{n-1} = R_nQ_{n+1} + R_{n+1}$

$\exists (Q_{n+2}, R_{n+2}) \in (\mathbb{K}[x])^2$ tq:

$R_n = R_{n+1}Q_{n+2} + R_{n+2}$

$R_{n+2} = 0$

donc

On aura: $R_{n+1} = \text{PGCD}(A, B)$

* Théorème de Bézout:

Soient $A, B \in \mathbb{K}[x]$ non nuls

Alors: $\exists (u, v) \in (\mathbb{K}[x])^2$

$Au + Bv = \text{PGCD}(A, B)$

Corollaires

① $A, B, C \in \mathbb{K}[x]$,
 $\underline{\text{Si}} \begin{cases} C \mid A \\ C \mid B \end{cases} \Rightarrow C \mid A \wedge B$

② $A, B \in \mathbb{K}[x]$,
 A et B sont premiers entre eux

$\underline{\text{SSI}} \exists (u, v) \in (\mathbb{K}[x])^2 / Au + Bv = 1$

③ (Lemme de Gauss)
 $A, B, C \in \mathbb{K}[x]$
 $\underline{\text{Si}} \begin{cases} A \mid BC \\ A \wedge B = 1 \end{cases} \Rightarrow A \mid C$

Propriétés :

① $A, B \in K[x]$ non nuls ;
 $A \wedge B = 0 \Leftrightarrow \exists A_1, B_1 \in K[x] ;$
 $A = \Delta A_1, B = \Delta B_1$ et $A_1 \wedge B_1 = 1$

② Soit P un polynôme unitaire
 alors : $(PA) \wedge (PB) = P(A \wedge B)$

③ $\forall n \geq 1$ et $\forall m \geq 1$, on a :
Si $A \wedge B = 1$ alors $A^n \wedge B^m = 1$

④ $\forall p \geq 1$ on a :

$$A^p \wedge B^p = (A \wedge B)^p$$

En particulier :

$$\text{Si } A \wedge B = 1 \text{ alors } A^p \wedge B^p = 1$$

* Division par $(x-a)$:

Théorème : Soit $P(x) \in K[x]$,
 $d^0 P = n \geq 1$, soit $a \in K$

Alors : $\exists Q \in K[x]$ et $R \in K$ tq :

$$P(x) = Q(x)(x-a) + R$$

avec :

- $d^0 R = 0$
- $R = P(a)$
- $d^0 Q = n - 1$

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) (x-a) + P(a)$$

Algorithme d'Horner :

objectif : Calcul des coefficients de $Q(x)$

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + a_n$$

$$\vdots$$

$$b_0 = a_0 + a_1$$

Corollaire :

$(x-a) \mid P(x)$ SSI le reste de la division Euclidienne de P par $(x-a)$ est nul.

Racines d'un polynôme :

Définition : Soient $P \in K[x]$ et $a \in K$.

On dit que a est une racine de P

$$\text{SSI} \\ P(a) = 0$$

Soient $P \in K[x]$ et $a \in K$.

a est une racine de P

$$\text{SSI} \\ P(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a) \mid P(x)$$

Définition : Soient $P \in K[x]$ et $a \in K$ et $k \in \mathbb{N}^*$

On dit que a est une racine de multiplicité k (ou racine d'ordre k) de P

$$\text{SSI} \\ (x-a)^k \text{ divise } P(x) \text{ et } (x-a)^{k+1} \text{ ne divise pas } P(x)$$

Théorème :

Soient $P \in K[x]$, $a \in K$ et $k \in \mathbb{N}^*$,
 a est une racine d'ordre k de P :

- SSI : $\exists Q \in K[x]$ tq :
 $P(x) = (x-a)^k Q(x)$ et $Q(a) \neq 0$
- SSI : $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$
 et $P^{(k)}(a) \neq 0$

Théorème : Soit $P \in K[x]$, $d^0 P = n \geq 1$

Alors : P admet au plus n racines.

Théorème :

Tout $P \in \mathbb{C}[x]$, $d^0 P = n \geq 1$, admet exactement n racines.

Les polynômes Irréductibles :

Définition : Soit $P \in K[x]$

On dit que : P est un polynôme irréductible

SSI $\forall Q \in K[x]$ tq Q divise P
 alors : Q est un polynôme constant ($Q \in K^*$)
ou $Q = x^k, k \in \mathbb{N}^*$

Remarque :

③ P irréductible et $P = A \cdot B \Rightarrow d^0 A = 0$ ou $d^0 B = 0$

$P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$;
 P est irréductible $\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathbb{K}[X]$,
 $P = AB \Rightarrow \deg(A) = 0$ ou $\deg(B) = 0$

Théorème :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n \geq 1$

• P est irréductible dans $\mathbb{Q}$

$$\Leftrightarrow n = 1$$

• P est irréductible dans $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ \text{ou} \\ n = 2 \text{ avec } \Delta < 0 \end{cases}$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

SSI $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P

alors $\bar{\alpha}$ est une racine de P aussi.

Fractions Rationnelles

Définition :

Une fraction rationnelle dans $\mathbb{K}$ est de forme :

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, Q non nul

$$d^\circ F = d^\circ P - d^\circ Q$$

On note :

$$\mathbb{K}(x) = \left\{ \text{ensemble des fractions rationnelles} \right\} \\ = \left\{ F = \frac{P}{Q} / P, Q \in \mathbb{K}[X] \text{ et } Q \neq 0 \right\}$$

Est une fraction rationnelle irréductible

SSI

$$P \wedge Q = 1$$

Rq : Toute fraction rationnelle admet un représentant irréductible.

No : est une racine de multiplicité m de F

$$\Leftrightarrow N_0 \text{ est une racine de multiplicité } m \text{ de } f_0$$

No : est un pôle de multiplicité m de F

$$\Leftrightarrow N_0 \text{ est une racine de multiplicité } m \text{ de } g_0$$

Rq : Il faut que la fraction soit irréductible pour parler de racines et de pôles

Définition : La partie Entière

la partie entière est l'unique polynôme E tq :

$$F = \frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q} \text{ avec } d^\circ P_1 < d^\circ Q$$

$$\text{Rq : } \begin{cases} \bullet \text{ Si } d^\circ P > d^\circ Q \\ \Rightarrow d^\circ E = d^\circ P - d^\circ Q \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } d^\circ P < d^\circ Q \\ \Rightarrow E = 0$$

Division Suivant les puissances

Croissantes : Soient $P \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathbb{K}[X]$

avec $B(0) \neq 0$ ($b_0 \neq 0$)

Alors $\exists ! (Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tq :

$$A(X) = B(X) \cdot Q(X) + X^{P-1} \cdot R(X)$$

avec $d^\circ R \leq P$ (ou $R = 0$)

Formule de Taylor pour un polynôme :

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, P s'écrit sous forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Théorème : (Division Euclidienne) :

$\forall (A, B) \in \mathbb{K}^2[X]$, $\exists (Q, R) \in \mathbb{K}^2[X]$ tq :

$$A = BQ + R \quad d^\circ R < d^\circ B$$

$$F = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

La décomposition en éléments simples :

Intérêt : Calcul de certaines primitives /
 Détermination des dérivées $n^{\text{ème}}$ de certaines fonctions.

Soit $Q = \prod_{i=1}^s (X - a_i)^{m_i}$: un polynôme scindé

Toute $F \in \mathbb{K}(X)$ de degré strictement inférieur se décompose de façon unique en :

$$F = \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^s \frac{R_i}{(X - a_i)^{m_i}} \quad (1 \leq i \leq s / d^\circ R_i < m_i)$$