

Polynômes

Déf: Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
On appelle **polynôme à coefficient dans K** , toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de K nulle à partir d'un certain rang (càd, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > n_0, a_n = 0$) = $P = (a_0, a_1, \dots, a_{n_0}, 0, \dots)$

Notation: L'ensemble des polynôme à coef dans $K = K[X]$

$$K[X] = \{P = (a_n)_{n \geq 0} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0, a_n = 0\}$$

- $\mathbb{R}[X]$: l'ensemble des polynômes à coef réels
- $\mathbb{C}[X]$: l'ensemble des polynômes à coef complexes
- On appelle **polynôme constant** $\forall n \geq 1, a_n = 0$
- On appelle **polynôme monôme** $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \neq n_0 \Rightarrow a_n = 0$

Déf: (Égalité de deux polynômes dans $K[X]$)
Deux polynômes $A = (a_n)_{n \geq 0}$ et $B = (b_n)_{n \geq 0}$ dans $K[X]$ sont égaux: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$

On appelle **polynôme nul** de $K[X]$ noté $0_{K[X]} = (0, 0, \dots, 0)$

Déf: (Degré d'un polynôme)
Soit $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K[X]$: Si $P \neq 0$
On appelle **degré de P** , noté $\deg(P)$, le plus grand entier naturel n tq $a_n \neq 0$

Exple:
 $P = (0, 1, 5, 6, 0, \dots, 0) \Rightarrow \deg P = 3$

$a_{\deg P}$: coef du terme de plus haut degré de P (ou dominant)
 P est unitaire (normalisé) $\Rightarrow a_{\deg P} = 1$

Si $P = 0_{K[X]}$ $\deg(P) = -\infty$

- On dit que P est pair: $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$
- On dit que P est impair: $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = 0$

Déf: (Addition)

Soient $A = (a_n)_{n \geq 0}, B = (b_n)_{n \geq 0} \in K[X]$
Alors $A + B = (a_n)_{n \geq 0} + (b_n)_{n \geq 0} = (a_n + b_n)_{n \geq 0} \in K[X]$

Remarque:

- $\deg(A+B) \leq \sup(\deg(A), \deg(B))$
 $\deg(A) \neq \deg(B) \Rightarrow \deg(A+B) = \max(\deg(A), \deg(B))$
 - L'addition $+$ est une LCI dans $K[X]$
 - Commutative
 - Associative
 - possède un élément neutre $0_{K[X]} = (0, 0, \dots, 0)$
 - Tout polynôme $P = (a_n)_{n \geq 0}$ de $K[X]$ possède un opposé $-P = (-a_n)_{n \geq 0}$
- Donc $(K[X], +)$ est gré abélien

Déf: (Multiplication)

Soient $A = (a_n)_{n \geq 0}, B = (b_n)_{n \geq 0} \in K[X]$
Alors $A \times B = C = (c_n)_{n \geq 0}$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \in K[X]$

Remarque:

- $\deg(A \times B) = \deg(A) + \deg(B)$
- La multiplication $\times$ est une LCI dans $K[X]$
 - Commutative
 - Associative
 - distributive $\times$ à $+$
 - possède un él^{mt} neutre $1_{K[X]} = (1, 0, 0, \dots)$
- $(K[X], +, \times)$ est un anneau commutatif
- Si $A \neq 0_{K[X]}$ et $B \neq 0_{K[X]} \Leftrightarrow \deg(A) + \deg(B) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \deg(A \times B) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow A \times B \neq 0_{K[X]}$
- Soit $P = (a_n)_{n \geq 0} \in K[X]$ et $\lambda \in K$
Alors $\lambda P = \lambda (a_n)_{n \geq 0} = (\lambda a_n)_{n \geq 0} \in K[X]$

Les éléments inversés de l'anneau $K[X]$ sont les suites $(a, 0, 0, \dots), a \in K^*$

$\exists 0 \in K[X] \text{ tq } P \cdot Q = 1$
 $\Rightarrow d^0 P + d^0 Q = d^0(P \cdot Q) = d^0 1 = 0$
 $\Rightarrow d^0 P = -d^0 Q = 0$
 $\Rightarrow \exists a \in K^* \text{ tq } Q = (a, 0, 0, \dots) \text{ et } P = (1/a, 0, 0, \dots)$

$\forall \lambda \in K^* \setminus \{0\}, \forall P \in K[X] \setminus \{0\} \Rightarrow \deg(\lambda P) = \deg(P)$

Déf:

Notation: Le polynôme $X = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ est appelé **l'indéterminé**

$$\begin{aligned} X^0 &= (1, 0, 0, \dots) = 1_{K[X]} \\ X^1 &= (0, 1, 0, \dots) \\ X^2 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \\ X^n &= (0, \dots, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

1 n-ème place

Soit P un polynôme de $d^0 = n$
 $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$
 $= [a_0(1, 0, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, \dots) + \dots + a_n(0, \dots, 1, 0, \dots)]$

$$\Rightarrow P = a_0 \cdot 1_{K[X]} + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Déf: (Composition)

Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K[X], Q \in K[X]$
On appelle le composé de P et Q le polynôme $P \circ Q$ ou $P(Q)$ déf par: $P \circ Q = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$
qui s'obtient en remplaçant X dans P par Q

$$\forall P, Q \in K[X] \setminus \{0\}, d^0(P \circ Q) = d^0 P \cdot d^0 Q$$

- $\forall \alpha \in K$ et $P, Q, R \in K[X]$
- $(P + \alpha Q) \circ R = P \circ R + \alpha Q \circ R$
 - $(P \cdot Q) \circ R = (P \circ R) \cdot (Q \circ R)$
 - $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$
 - $X \circ P = P \circ X = P$

Déf: (Dérivation)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $d^0 P = n$ dans $K[X]$
On appelle **polynôme dérivé de P** : $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$

- Si $d^0 P = 0$ Alors $P' = 0$
- Si $d^0 P \geq 1$ Alors $d^0 P' = d^0 P - 1$
- $\forall P \in K[X], \forall n \in \mathbb{N}: d^n P = 0 \Leftrightarrow \deg P \leq n$
- Formule de Leibniz:**
 $(PQ)' = \sum_{k=0}^n C_k^p P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Formule de Taylor:
 $P(x) = P(a) + (x-a)P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}P''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a)$

Arithmétique dans $K[x]$:

Soit A et $B \in K[x]$ tq $B \neq 0_{K[x]}$:

On dit que B divise A ($B|A$) ssi:

$$\exists Q \in K[x] \text{ tq } A = BQ$$

B est un diviseur de A ou A multiple de B

1. $\forall A \in K[x] \setminus \{0_{K[x]}\}; A|A$
2. $\forall A, B \in K[x] \setminus \{0_{K[x]}\}$:
 $\left. \begin{matrix} A|B \\ B|A \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \exists \alpha \in K^* \text{ tq } A = \alpha B$
(A et B sont associés)
3. $\forall A, B \in K[x] \setminus \{0_{K[x]}\} \text{ et } \forall C \in K[x]$:
 $\left. \begin{matrix} A|B \\ B|C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A|C$
4. $\forall A \in K[x] \setminus \{0_{K[x]}\}, \forall B, C \in K[x]$:
 $A|B \Rightarrow A|BC$
5. $\forall A \in K[x] \setminus \{0_{K[x]}\}, \forall B, C \in K[x], \forall \alpha, \beta \in K$:
 $\left. \begin{matrix} A|B \\ A|C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A|\alpha B + \beta C$
6. $\left. \begin{matrix} A|B \\ C|D \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC|BD$
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*, A|B \Rightarrow A^n|B^n$

Déf: (Division Euclidienne)

Soient $A \in K[x]$ et $B \in K[x] \setminus \{0_{K[x]}\}$

$$\exists! (Q, R) \in K[x]^2 \text{ tq } \begin{cases} A = BQ + R \\ d^0 R < d^0 B \end{cases}$$

Déf: (P.G.C.D)

On appelle **p.g.c.d** (A, B) le polynôme unitaire

Notation:

- On note D_A : l'ensemble des diviseurs de A
- $D_A \cap D_B$: l'ensemble des diviseurs communs de A et B

Algorithme d'Euclide:

$$\text{Si } A = BQ + R \quad (d^0 R < d^0 B)$$

$$\text{Alors } \text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R)$$

le **pgcd** (A, B) est le dernier reste non nul unitaire dans les D.E successives dans l'Algo. Euclide

Normaliser un polynôme

$$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$P_N = \frac{1}{a_n} P_n = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}$$

Déf: (Polynôme premiers entre eux)

A et B sont 1^{er} entre eux $\Leftrightarrow \text{pgcd}(A, B) = 1$

(càd les seuls diviseurs communs de A et B sont les constantes $\neq 0$)

* Théorème de Bezout:

A et B sont 1^{er} entre eux ssi:

$$\exists u, v \in K[x] \text{ tq } Au + Bv = 1$$

$$\begin{matrix} d^0 u < d^0 B \\ d^0 v < d^0 A \end{matrix}$$

* Théorème de Gauss:

$$\left. \begin{matrix} A|BC \\ A \nmid B \end{matrix} \right\} \Rightarrow A|C$$

Propositions

- $\left. \begin{matrix} \text{pgcd}(A, B) = 1 \\ \text{pgcd}(A, C) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{pgcd}(A, BC) = 1$
- $\left. \begin{matrix} A|C \\ B|C \\ \text{pgcd}(A, B) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB|C$

Déf: (Polynôme Irréductible)

On appelle un poly. irréductible (ou premier) :

$$d^0 P \geq 1$$

P n'admet comme div que: les const non nulle $\alpha \in K^*$

1. La notation d'irréductible dépend du corps $K[x]$.

2. Soient L un corps et K un ss-corp de L : Si P est irréductible dans $L[x]$ Alors P " " dans $K[x]$

La réciproque est fautive

* les poly qui lui sont associés βP $\beta \in K^*$