

Algèbre: notions de base

Ensemble: collection d'objets présentant une ou plusieurs propriétés communes.

- $x \in E$: x élément de E .
- $x \notin E$: négation de $x \in E$.

• Inclusion:

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F.$$

• Egalité:

$$E = F \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases} : \text{double inclusion}$$

• Intersection:

$$A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Rq:

si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ et B sont disjointes.

• Réunion:

$$A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

• Complémentaire:

$$C_E^A = A^c = \bar{A} = \{x \in E; x \notin A\}$$

• différence:

$$A \setminus B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

• différence symétrique:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

• partition:

on dit que la famille $\{A_i\}_{i \in I}$ forme une partition de E si:

$$\bullet \forall i \in I, A_i \neq \emptyset$$

$$\bullet \forall i, j \in I; i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\bullet \bigcup_{i \in I} A_i = E$$

Rqs:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

• Loi de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

• Produit Cartésien: de deux ensembles E et F : ensemble des couples

$$(x, y) \text{ tq } x \in E \text{ et } y \in F \Rightarrow E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Généralité: $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ ou $\prod_{i=1}^m E_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) / x_i \in E_i, (i \leq m)\}$

$$\text{Rq: Si } E_1 = E_2 = \dots = E_m \Rightarrow \prod_{i=1}^m E_i = E^m$$

• Application :

Pour $\forall x \in E, \exists ! y \in F$ tq $(x, y) \in \Gamma$ (Γ : partie $E \times F$)

y : image de x par $f = f(x)$

$$f : E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x)$$

(on prend un élément x de E , on l'encadre jusqu'à trouver f et F est égale à l'ensemble d'arrivée $\Rightarrow$ c'est une application)

• Ensemble d'applications :

l'ensemble d'app d'un ensemble E dans F : $\mathcal{F}(E, F) = F^E$

2.
• **Injection**: (départ)

$$\forall x, x' \in E; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \quad \left(\begin{array}{l} \text{P'autre sens est évident car } f \\ \text{est une application} \end{array} \right)$$

• **Surjection**: (arrivée)

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tq } y = f(x).$$

• **Bijection**: (inj + surj)

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tq } y = f(x)$$

Rq: une bijection de E dans lui-même s'appelle **permutation**

l'ensemble de permutations de E : $\text{Bij}(E)$.

Exp: si $\text{card}(E) = n$ alors $\text{card}(\text{Bij}(E)) = n!$

• **Image directe**: f

$$f: E \longrightarrow F$$

$$\text{si } A \subseteq E, f(A) = \{y \in F / \exists a \in A, y = f(a)\} = \{f(a) / a \in A\}$$

• **Image réciproque**: f^{-1}

$$\text{si } B \subseteq F, f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

$$\triangle x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in E \\ f(x) \in B \end{cases}$$

$$\triangle f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$$

• Soit R une relation binaire dans E .

• **Reflexive:**

si: $\forall x \in E, x R x$ (exp: $x = x$)

• **Symétrique:**

si: $\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow y R x$ (exp $x = y \Leftrightarrow y = x$)

• **Antisymétrique:**

si: $\forall x, y \in E, \begin{cases} x R y \\ y R x \end{cases} \Rightarrow x = y$ (exp $x > y$ et $y > x \Rightarrow x = y$)

• **Transitive:**

si: $\forall x, y, z \in E \begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$

• **Relation d'équivalence:** (égal, parallèle)

si elle est réflexive, symétrique et transitive.

• **Relation d'ordre:** (inclusion dans $P(x)$)

si elle est réflexive, antisymétrique et transitive

• **Classe d'équivalence:**

Soit E, R : relation d'équivalence.

Pour $\forall x \in E$: $cl_R(x) = \{y \in E / x R y\}$

Rq: $\forall x, y \in E; x R y \Leftrightarrow cl_R(x) = cl_R(y)$.

• **Totale:**

• Une relation d'ordre R sur E est totale si :

$$\forall x, y \in E : x R y \text{ ou } y R x$$

• **Partielle:**

$$\forall x, y \in E : x R y \text{ et } y \text{ non } R x$$

Ensemble quotient :

Ensemble
des
classes
$$\frac{E}{R} = \{cl_R(x) ; x \in E\}$$

Rq: Les classes d'équivalences forment une partition de E .

• Si E est muni d'une relation d'ordre R :

(E, R) un ensemble ordonné.

• **majorant:**

soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $A \subset E$ et $a \in E$.

• a est un majorant de A si :

$$\forall x \in A, x \leq a$$

• **majorée :**

• A est majorée si elle possède au moins un majorant $a \in A$.

• **minorant:**

• a est un minorant de A si : $\forall x \in A, x \geq a$.

• **minorée :**

• A est minorée si elle possède au moins un minorant $a \in A$.

• **Plus grand élément:**

B de E plus grand élément de A si : $\begin{cases} B \in A \\ B \text{ majorée} \end{cases}$

• **plus petit élément:**

B de E plus petit élément de A si : $\begin{cases} B \in A \\ B \text{ minorée} \end{cases}$