

## Quelques notions de base

### Définition d'un ensemble :

C'est une collection d'objets présentant une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont suffisantes pour affirmer qu'un objet appartient ou non à cet ensemble.

Si un objet  $x$  appartient à un ensemble  $E$ , on dit aussi que  $x$  est un élément de  $E$  et on note :  $x \in E$ .

Rq: la négation de  $x \in E$  est  $x \notin E$ .

### Définition d'inclusion :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $E$  est inclus dans  $F$  et on note  $E \subset F$  si l'élément de  $E$  est élément de  $F$ .

$E \subset F$  sig  $\forall x \in E ; x \in F$ .

### Vocabulaire $\Leftrightarrow$

Si  $E \subset F$  alors on dit que  $E$  est un sous-ensemble de  $F$  ou que  $E$  est une partie de  $F$ .

Soit  $E$  un ensemble. L'ensemble de toutes les parties de  $E$  est noté  $\mathcal{P}(E)$ .

ex: Soit  $E$  formé de deux éléments.  $E = \{a, b\}$

alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$

singleton

pair

Ex:

Mq si  $\text{Card}(E) = n$  alors  $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

### Définition d'Égalité entre deux ensembles :

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $E$  et  $F$  sont égaux et on note

$E = F$  s'ils ont exactement les mêmes éléments

$E = F \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$

### Définition d'intersection:

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On appelle intersection de  $A$  et  $B$  la partie de  $E$  notée  $A \cap B$  définie par:

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Rq:

Si  $A \cap B = \emptyset$  alors les parties  $A$  et  $B$  sont disjointes.

### Définition de la réunion:

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B \in E$ .

On appelle réunion de  $A$  et  $B$  la partie de  $E$  notée  $A \cup B$  définie par:

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

### Définition du complémentaire d'une partie:

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ .

On appelle complémentaire de  $A$  dans  $E$  la partie de  $E$  notée:

$$C_E A \text{ ou } A^c \text{ ou } \bar{A} \text{ définie par:}$$

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

Rq:

$$A \cap \bar{A} = \{E\} \text{ et } A \cup \bar{A} = \{E\}$$

### Définition de la différence:

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B \in E$ .

On appelle différence  $A - B$  la partie de  $E$  notée  $A \setminus B$

$$\text{définie par: } A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

Rq:

on peut définir d'une façon analogue la partie  $B \setminus A$ .

### Définition différence symétrique:

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

On appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$  la partie de  $E$  notée:

$$A \Delta B \text{ définie par:}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

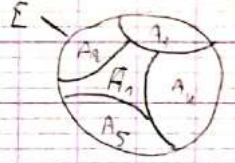
### Définition. Partition:

Soit  $E$  un ensemble et  $\{A_i\}_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ .  
On dit que la famille  $\{A_i\}_{i \in I}$  forme une partition de l'ensemble  $E$

si:  $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$

$\forall i, j \in I: i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$\bigcup_{i \in I} A_i = E$  (réunion de tous les éléments)



Ex: soit  $E$  un ensemble et  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ .

Vérifiez ces propriétés:

$$* A \cap B = B \cap A$$

$$* A \cup B = B \cup A$$

$$* A \cap A = A$$

$$* A \cup A = A$$

$$* (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$* (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$* A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$* A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$* \overline{\overline{A}} = A$$

$$* \overline{E} = \emptyset$$

$$* A \cap B \subset A$$

$$* A \cap B \subset B$$

$$* A \subset A \cup B$$

$$* \text{Loi de Morgan: } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad / \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

25.09.2018

### Produit cartésien:

Le produit cartésien de deux ensembles  $E$  et  $F$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tq  $x \in E$  et  $y \in F$ .

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$$

d'une façon générale; Soient  $E_1, E_2, \dots, E_m$  des ensembles ( $m \geq 2$ )

Le produit cartésien de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$  est l'ensemble noté  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$  ou bien  $\prod_{i=1}^m E_i$  est l'ensemble de  $m$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  tq:

$$x_i \in E_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) / x_i \in E_i \quad \forall 1 \leq i \leq m\}$$

Ex:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } E_1 = E_2 = \dots = E_m = E \\ \prod_{i=1}^m E_i = \prod_{i=1}^m E = E^m \end{aligned}$$

$$\bullet \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

$$\bullet \mathbb{R}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) / x_i \in \mathbb{R} \quad \forall 1 \leq i \leq m\}$$

$$\bullet (a, b) \leftarrow \text{couple} \neq \{a, b\} \leftarrow \text{paire}$$

$\hookrightarrow$  élément du produit  $\hookrightarrow$  ensemble

Cartésien

(l'ordre intervient)

$$\begin{aligned} \text{Déf: (égalité)} : \bullet \text{ Soit } (x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ et } (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \prod_{i=1}^m E_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_m) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Dans } \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \dots, x_m) = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} / x_i = 0 \\ \text{négation} \Rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m) \neq (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, m\} / x_i \neq 0 \end{aligned}$$