

Les Ensembles

Déf: (Inclusion)

- $E \subset F \Rightarrow \forall x \in E, x \in F$
- $\mathcal{P}(E)$: l'ensemble des parties de E
- Exp: $E = \{a, b\} \Rightarrow \mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a, b\}\}$

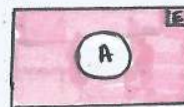
Si $\text{card } E = n$ (à démontrer)
 $\Rightarrow \text{card } \mathcal{P}(E) = 2^n$

$A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$
 $a \in \{a, b\}; \{a\} \subset \{a, b\}$

singlotant
paire

Déf: (Complémentaires) $C_E^A = A^c = \bar{A}$

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



- $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$
- $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$

$$C_E^A = E \setminus A$$

$$\bar{\bar{E}} = \emptyset$$

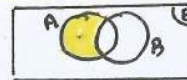
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Déf: (Différence)

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$
- $A \setminus B = A \cap \bar{B} = A \setminus (A \cap B)$



Déf: (égalité)

$$E = F \Leftrightarrow \begin{cases} E \subset F \\ F \subset E \end{cases}$$

Déf: (intersection)

* Soient E un ensemble et A et B deux parties de E:

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

- Rq:
- A et B disjointes $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$
 - A et B distincts $\Rightarrow A \neq B$



Remarque!!

$$\{A \cap B\} \rightarrow A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ou

$$\{g(A) \cap g(B)\} \rightarrow g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$$

- $A \cap E = A$ (E l'élémt neutre)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ ($\emptyset$ est absorbant)
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
- $\cap$ est commutative
- $\cup$ est associative

Déf: (réunion)

* Soient A et B 2 parties de E:

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

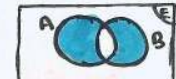


- $A \cup \emptyset = A$ ($\emptyset$ l'élémt neutre)
- $A \cup E = E$ (E est absorbant)
- $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
- $\cup$ est commutative
- $\cup$ est associative

Déf: (Différence symétrique)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- Δ est commutative
- $A \Delta \emptyset = A$ ($\emptyset$ l'élémt neutre)
- $A \Delta A = \emptyset$



Déf: (Partition)

* E ensemble et $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de E

On dit que la famille $\{A_i\}_{i \in I}$ forme une partition

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
- $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$



Déf: (Produit cartésien)

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

notation:
 $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$
 $= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in E_i\}$

- $E \times F = \emptyset \Leftrightarrow E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset$
- $E \times F = F \times E \Leftrightarrow E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \text{ ou } E = F$
- $(E \times F) \cup E \times (F \cup G) = E \times (F \cup G)$
- $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

Déf: (Application)



l'ensemble des applications d'un ensemble E dans un ensemble F sera noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E

x_A s'appelle l'application la partie A

- $A = B \Leftrightarrow x_A = x_B$
- $x_{A \cap B} = x_A \cdot x_B$
- $x_{\bar{A}} = 1 - x_A$ ($x_{\emptyset} = 0, x_E = 1$)
- $A \cup B = x_A + x_B - x_A x_B$
- $A \Delta B = x_A + x_B - 2x_A x_B$

Injection, Surjection, Bijection:

Déf: (injection)

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ou $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Déf: (Surjection)

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Déf: (Bijection)

injective + surjective

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

* l'application réciproque: $f^{-1}: F \rightarrow E$
 $\forall y \in F, \exists! x \in E, f^{-1}(y) = x$

Une bijection de E dans lui-même se dit permutation de E noté l'ensemble noté $\text{Bij}(E)$
 $\text{Card } E = n \Rightarrow \text{Card } \text{Bij}(E) = n!$

Image directe, Image réciproque:

Déf: (image directe) $f: E \rightarrow F$ $\{f(x) \in f(A) \mid x \in A\}$

Si $A \subseteq E$, l'image de A est la partie de F ($f(A)$)

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} \\ = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Déf: (image réciproque)

Si $B \subseteq F$, l'image réciproque de B est la partie de E ($f^{-1}(B)$)

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

$$x \in f^{-1}(B) \iff \begin{cases} x \in E \\ f(x) \in B \end{cases}$$

⚠ f^{-1} est juste une notation ⚠

Propriétés:

- La composition de 2 injections $\rightarrow$ injection
- La composition de 2 surjections $\rightarrow$ surjection
- La composition de 2 bijections $\rightarrow$ bijection

Propriétés:

- $g \circ f$ injective $\rightarrow f$ injective $f(x) = f(x') \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$
- $g \circ f$ surjective $\rightarrow g$ surjective $\exists y \in F, \exists x \in E, y = g \circ f(x) = g(f(x)) \Rightarrow y = g(x')$
- $g \circ f$ bijective $\rightarrow g$ bijective $\forall y, y' \in F, y \neq y' \Rightarrow g(y) \neq g(y') \Rightarrow g \circ f(x) \neq g \circ f(x') \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$
- $g \circ f$ injective + f surjective $\rightarrow f$ bijective
- $g \circ f$ surjective + f injective $\rightarrow f$ bijective

Proposition: (À démontrer tjr)

$$f: E \rightarrow F$$

1) $\forall$ parties A et B de E :

- $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

$\Rightarrow$ si f est injective

2) $\forall$ parties A' et B' de F :

- $A' \subseteq B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}$

3) $\forall A \in \mathcal{P}(E): A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\Rightarrow$ si f est injective

$\forall A' \in \mathcal{P}(F): f(f^{-1}(A')) \subseteq A'$

$\Rightarrow$ si f est surjective

Relation Binaire " R ":

* R , dans un ensemble E , est dite:

1. **Reflexive:** $\forall x \in E, x R x$
2. **Symétrique:** $\forall x, y \in E, x R y \Rightarrow y R x$
3. **Antisymétrique:** $\forall x, y \in E, \begin{cases} x R y \\ y R x \end{cases} \Rightarrow x = y$
4. **Transitive:** $\forall x, y, z \in E, \begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$

Déf: (Relation d'équivalence)

- reflexive
- symétrique
- transitive

$\forall x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x (modulo R) noté $CP_R(x), \hat{x}, \bar{x}, \tilde{x}$:

$$\Rightarrow CP_R(x) = \{y \in E \mid x R y\} \Rightarrow \text{c'est un ensemble de pts}$$

On appelle **ensemble-quotient** de E par R , l'ensemble des classes d'équivalence modulo R :

$$E/R = \{CP_R(x) \mid x \in E\}$$

$\forall x, y \in E, x R y \iff x = y$ Les CP_R forment une partition de E .

Déf: (Relation d'ordre)

- reflexive
- antisymétrique
- transitive

Un **ensemble ordonné** est un couple $(E, \leq)$ où $\leq$ est une relation d'ordre (un ordre) sur E

$x, y \in E$: sont dit **comparables** pour $\leq$ si: $x \leq y$ ou $y \leq x$

On dit que R est **totale** (E, R) :

$$\Rightarrow \forall x, y \in E, x R y \text{ ou } y R x \text{ (comparables)}$$

$\Rightarrow$ Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **partielle**.

Déf: Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné:

Soient $A \in \mathcal{P}(E), x \in E$: on dit que x est **un majorant** (resp. **minorant**) de A dans E

$$\iff \forall a \in A, a \leq x \text{ (resp. } x \leq a)$$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$: on dit que A est **majorée** (resp. **minorée**) dans $E \iff A$ admet au moins un majorant (resp. **minorant**)

$$\iff \exists x \in E, \forall a \in A, a \leq x \text{ (resp. } x \leq a)$$

Soient $A \in \mathcal{P}(E), a \in E$. On dit que a est **un plus grand** (resp. **plus petit**) élément de A :

$$\iff \begin{cases} a \in A \\ \forall a' \in A, a' \leq a \end{cases} \text{ (resp. } a \leq a')$$

Soient $A \in \mathcal{P}(E), x \in A$. On dit que x est **un élément maximal** (resp. **minimal**) de A :

$$\iff \forall a \in A, (x \leq a \Rightarrow x = a) \text{ (resp. } a \leq x)$$