

* Résolution des équations dans $\mathbb{C}$:

• $x^2 = -1$

$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x = i \\ \text{ou} \\ x = -i \end{cases}$

• $x^3 = -1$

$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = j \\ \text{ou} \\ x = j^2 \end{cases}$

• Dans le cas général :

$a^3 = b^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = b j \\ \text{ou} \\ a = b j^2 \end{cases}$

* Calcul de i^m et j^m :

• i^m : on pose $m = 4k + r$; $(k, r) \in \mathbb{N}^2$; $0 \leq r < 4$

$\rightarrow \boxed{i^m = i^{4k+r}} \quad \text{Si } r = \begin{cases} 0 \rightarrow i^m = 1 \\ 1 \rightarrow i^m = i \\ 2 \rightarrow i^m = -1 \\ 3 \rightarrow i^m = -i \end{cases}$

• j^m : on pose $m = 3k + r$; $(k, r) \in \mathbb{N}^2$; $0 \leq r < 3$

$\rightarrow \boxed{j^m = j^{3k+r}}$

$\text{Si } r = \begin{cases} 0 \rightarrow j^m = 1 \\ 1 \rightarrow j^m = j \\ 2 \rightarrow j^m = j^2 \end{cases}$

* Soit le nombre complexe suivant :

$z = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)_a = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)_b = \left(e^{i \frac{2\pi}{3}}\right)_c$

- a : Écriture algébrique $\rightarrow$ Sous forme de : $a + ib$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- b : Écriture trigonométrique $\rightarrow$ Sous forme de : $r \cos \theta + i r \sin \theta$; $\theta \in [0, 2\pi[$; $r \in \mathbb{R}^+$ (module)
- c : Écriture exponentielle $\rightarrow$ Sous forme de : $r e^{i\theta}$

Ce nombre est noté j :

$\begin{cases} j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ j = e^{i \frac{2\pi}{3}} \end{cases}$

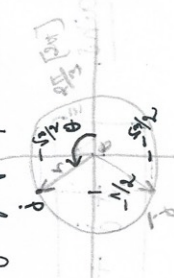
• Module de j :

$|j| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$j \in \mathbb{U}$

$\uparrow$
l'ensemble des
nombres complexes
dont le module = 1

• j graphiquement :



• Argument de j :

$\text{Arg}(j) \equiv \theta \pmod{2\pi}$

$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}}$

①

* de conjugué de j :

$$\bar{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

* de carré de j :

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \bar{j} \quad \text{ainsi:}$$

$$\boxed{j^2 = \bar{j}}$$

* de cube de j :

$$j^3 = j \times j^2 = j \times \bar{j} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \boxed{1}$$

* la somme de :

$$1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 1 + 2\operatorname{Re}(j)$$

$$= 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0$$

ainsi:

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0}$$

* $j^4 = (j^2)^2$

$$= (-1-j)^2$$

$$= (1+j)^2$$

$$= 1 + 2j + j^2$$

$$= \underbrace{1 + j + j^2}_{=0} + j$$

$$= j$$

* Comme on a $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$ alors

j est une solution de $(E): z^2 + z + 1 = 0$

En effet: $j^2 + j + 1 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = (\pm i\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \delta = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x'' = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= j$$

$$= j^2$$

* Remarque : $j = e^{2i\pi/3}$ est une racine cubique de l'unité.

⑧