

Les Espaces Vectoriels (e.v)

Definition :

- Soient E un ensemble non vide et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- les éléments de E sont appelés des **vecteurs**.
- les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.
- On définit une loi de composition interne (l.c.i) :

$$+_E : E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \longmapsto x +_E y$$

et une loi de composition externe (l.c.e) :

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$$

Vérifiant :

- la l.c.i est commutative.
- la l.c.i est associative.
- $\exists$ un élément neutre $0_E \in E$ tq :

$$u + 0_E = u \quad (\forall u \in E) \text{ (vecteur nul)}$$
- $\forall u \in E, \exists u' / u + u' = 0_E$
 u' est appelé l'opposé de u
 u' s'écrit $-u$ l'inverse de u
- $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \mu) \cdot u \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in E)$
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v \quad (\forall \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in E)$
- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda u + \mu u \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in E)$

Démonstration de l'unicité de l'élément neutre :

Soient 0_E et $0'_E$ deux éléments neutres de E
 Alors, $\forall u \in E$ on a :

$$\begin{cases} u + 0_E = u \\ u + 0'_E = u \end{cases}$$

 $\Rightarrow u + 0_E = u + 0'_E \Rightarrow 0_E = 0'_E$

On note $(E, +_E, \cdot)$: un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K}$ -e.v)

Exemples :

- $(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n}, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
- $(\mathbb{R}_n[X], +_{\mathbb{R}_n[X]}, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel
- $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'ensemble des f^{cts} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $E = S = F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles
- $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$: Matrice à coeff dans $\mathbb{R}$

Remarque :

Soit E un e.v sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E$$

Les Sous-Espaces Vectoriels : (S-e.v)

Definition :

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $F \subseteq E$.

F est un espace vectoriel

SSI : ① F est non vide ($0_E \in F$)

② $(\alpha \cdot x + y) \in F \quad (\forall x, y \in F \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R})$

Pour montrer que F n'est pas un S-e.v : Il suffit de montrer l'un des contre-exemples :

- $0_E \notin F$
- $\exists x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tq $(\alpha x) \notin F$
- $\exists x, y \in F$ tq $(x + y) \notin F$
- $\exists x, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tq $(\alpha x + y) \notin F$

Combinaison linéaire (C.L) :

Definition :

Soient $V_1, V_2, \dots, V_m \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs

$V_1, \dots, V_m$ avec les coefficients (scalaires) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

le vecteur $u \in E$ défini par :

$$u = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i V_i$$

On note :

$$\text{Vect}\{V_1, \dots, V_m\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'ensemble de toutes les CL} \\ \text{des vecteurs } V_1, \dots, V_m \end{array} \right\}$$

Plus formelle :

$$\text{Vect}\{(V_i)_{i \in I}\} = \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i V_i \mid J \subset I, J \text{ fini}, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

c'est le plus petit S-e.v de E contenant tous les vecteurs V_i .

Rq :

$\text{Vect}\{V_1\}$: les vecteurs colinéaires à V_1
 $u \in \text{Vect}\{V_1\} \Leftrightarrow \exists \alpha_1 \in \mathbb{K} \text{ tq } u = \alpha_1 V_1$

En général :

$$u \in \text{Vect}\{V_1, \dots, V_m\} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ tq } u = \sum_{i=1}^m \alpha_i V_i$$

Théorème :

Tout S-e.v est un e.v

Remarques :

- L'intersection de 2 S-e.v de E est un S-e.v de E
- La réunion de 2 S-e.v de E n'est pas forcément un S-e.v de E

Rq : $(F_1 \cup F_2)$ est un S-e.v de $E \Leftrightarrow F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$
 à prouver !!!

Somme de 2 s.e.v :

Définition :

Soient F et G 2 s.e.v de E (E :ev)

Alors : La somme de F et G :

$$F + G = \{W \in E \mid W = u + v \text{ avec } u \in F \text{ et } v \in G\}$$

Proposition : Soient F et G 2 s.e.v d'un ev E .

$$F + G = \text{Vect}(F \cup G)$$

Proposition :

Soient F et G 2 s.e.v d'un ev E .

Alors : $F + G$ est le plus petit s.e.v de E contenant $F \cup G$.

Preuve :

• $(F + G) \neq \emptyset$ (car $0 = 0 + 0 \in (F + G)$)

• Soit $x, z \in (F + G)$ et $\alpha \in K$

On a : $x \in (F + G) \Rightarrow x = u + v, u \in F \text{ et } v \in G$

$\Rightarrow z \in (F + G) \Rightarrow z = u' + v', u' \in F \text{ et } v' \in G$

$$(\alpha x + z) = \alpha(u + v) + (u' + v')$$

$$= (\alpha u + u') + (\alpha v + v')$$

et donc $(\alpha x + z) \in F + G$ (car F et G sont s.e.v)

Ainsi : $(F + G)$ est un s.e.v

De plus, soit H un s.e.v de E qui contient F et G .

Soit $x = u + v \in (F + G)$.

Comme $u \in F$ et $v \in G$, on a $u \in H$ et $v \in H$

et donc $x = u + v \in H$

d'où $(F + G) \subset H$

Ainsi : $(F + G)$ est le plus petit s.e.v de E contenant F et G .

Somme Directe :

Définition :

Soient F et G 2 s.e.v de E .

On dit que E est la somme directe de F et G

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

On note : $E = F \oplus G$

Proposition :

Soient E un ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_1, \dots, v_n \in E$

On pose $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

1. Si $u \in E$ est une combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$
alors $u \in F$

2. Si $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ tq v_i est la CL des autres vecteurs

alors on peut retirer v_i de F

autrement dit : $F = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

(2)

Famille génératrice, famille libre, Base :

Définitions :

Soit E un ev sur K et $F = \{u_1, \dots, u_n\}$: une famille de vecteur de E .

① On dit que F est une famille libre SSI :

$$\text{Si } \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0_E \text{ Alors } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

la CL est nulle

les scalaires sont nuls

② On dit que F est une famille génératrice SSI :

$$\forall v \in E, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \text{ tq } v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

③ F est une Base SSI :

F est une famille génératrice et libre.

Remarque : F est une famille liée

Si on peut écrire un vecteur comme CL des autres.

Dimension :

Définition :

Soit E un ev sur K . On appelle dimension de E le nombre de vecteur de la base.

Rq :

E un ev. sur K de : $\text{Dim}(E) = n$ et $F \subset E$.

Alors :

① Si F est libre alors $\text{Card}(F) \leq \text{Dim}(E) = n$

② Si F est génératrice alors $\text{Card}(F) \geq \text{Dim}(E) = n$

③ Si F est génératrice et libre alors $\text{Card}(F) = \text{Dim}(E) = n$

④ Si F est libre et $\text{Card}(F) = \text{Dim}(E) = n$

alors F est une base de E .

Rq :

$$\bullet \text{Dim}(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$$

$$\bullet \text{Dim}(\mathbb{R}^n) = n$$

• Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\text{et } (1, X, X^2, \dots, X^n)$$