

Espaces Vectoriels

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif (généralement: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de zéro 0 et d'unité 1.

Une loi de composition externe sur un ensemble E et de domaine $\mathbb{K}$ est une application $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, l'image d'un élément (λ, x) est notée $\lambda.x$

1 Structure d'espace vectoriel

Definition 1.1. *Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$ -espace vectoriel) est un triplet $(E, ., +)$, où E est un ensemble non vide, $.$ est une loi de composition externe sur E de domaine K , $+$ est une l.c.i sur E :*

(E1) $(E, +)$ est un groupe abélien

(E2) La loi externe vérifie les propriétés suivantes:

V1) $1.x = x$, pour tout $x \in E$;

V2) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $x \in E$;

V3) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et pour tout $(x, y) \in E^2$;

V4) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

Un élément d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est appelé vecteur. L'élément neutre de la loi $+$, noté 0_E (ou parfois 0 si sans risque de confusion).

Exemple 1.1.

1. Le corps $\mathbb{K}$ lui-même est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, en prenant sa multiplication comme loi externe.
2. Le produit cartésien $E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$ de deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \alpha.(x, y) = (\alpha.x, \alpha.y).$$

On peut généraliser au produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in E_i\}$ de n $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. En particulier, $\mathbb{R}^n$ ($E_1 = E_2 = \cdots = E_n = \mathbb{R}$), est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel qui est aussi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3. Soit X un ensemble non vide, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors l'ensemble E^X des applications $f : X \longrightarrow E$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel grâce aux deux lois:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x) \text{ pour tout } (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E.$$

En particulier, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites d'éléments de K) est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réel) est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Premières propriétés

Soit E un K -espace vectoriel. Alors on a les propriétés suivantes:

1. Pour tout $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a:

$$\alpha.x = 0_E \quad \text{si, et seulement, si} \quad \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

2. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $x \in E$, on a:

$$\alpha.(x - y) = \alpha.x - \beta.y \quad \text{et} \quad (\alpha - \beta).x = \alpha.x - \beta.x.$$

En particulier, $(-1).x = 1.(-x) = -x$, pour tout $x \in E$.

Combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On appelle combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ tout vecteur $x \in E$ qui s'écrit sous la forme:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{F}$ est noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ou $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Donc

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Par exemple, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{F} = \{\cos, \sin\}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est l'ensemble des fonctions f de la forme $f(x) = a \cos x + b \sin x$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1.1 Sous- espaces vectoriels

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E (s.e.v) toute partie F de E telle que

F1) F stable par $+$ et $\therefore x + y \in F$ et $\alpha.x \in F$, pour tout $(x, y, \alpha) \in F \times F \times \mathbb{K}$

F2) $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

Théorème 1.1. Une partie F d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \neq \emptyset$ et $\alpha.x + \beta.y \in F$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $(x, y) \in F^2$.

Preuve Par définition, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel, donc non vide et stable par combinaison linéaire. Réciproquement, F une partie non vide et stable par combinaison linéaire, en particulier: $x - y \in F$ pour tout $(x, y) \in F^2$ et donc F est un sous-groupe de $(E, +)$; et par conséquent $(F, +)$ un groupe abélien et les propriétés $V1$, $V2$, $V3$ et $V4$ de la loi externe de E s'étendent à la loi externe induite dans F . ■

Remarque 1.1. *Pour qu'une partie F d'un espace vectoriel E soit un s.e.v de E , il faut que $0_E \in F$. Dans le cas contraire, F n'est certainement pas un s.e.v.*

Exemple 1.2.

1. Pour tout espace vectoriel E , $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E , appelées sous-espaces triviaux.
2. Pour toute famille $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n vecteurs de E , l'ensemble $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace de E .
3. Les sous espaces non triviaux du plan $\mathbb{R}^2$ sont les droites passant par l'origine
3. Les sous espaces non triviaux de l'espace $\mathbb{R}^3$ sont les droites et les plans passant par l'origine
4. L'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E . La réunion $F \cup G$ est un sous-espace de E si, et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$ (exercice)
5. L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ est un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$; en effet, $\mathbb{K}_n[X] \neq \emptyset$ et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$, on a $\deg(\alpha P + \beta Q) \leq \sup(\deg(\alpha P), \deg(\beta Q)) \leq n$.
6. L'ensemble des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.