



Ensembles, applications, relations

Sommaire

I	Un peu de logique	2
I.1	Assertions	2
I.2	Opérations sur les assertions	2
I.3	Tableaux de vérité	3
I.4	Quelques synonymies classiques	3
I.5	Conditions nécessaires et/ou suffisantes	4
I.6	Prédicats et quantificateurs	5
I.7	Quelques bons conseils	5
II	Le langage des ensembles	7
II.1	Ensembles et éléments	7
II.2	Opérations sur les ensembles	7
II.3	Parties d'un ensemble	9
II.4	Opérations sur les parties d'un ensemble	9
III	Applications	11
III.1	Généralités	11
III.2	Exemples d'applications	11
III.3	Prolongements et restrictions	12
III.4	Image d'une partie par une application	13
III.5	Image réciproque d'une partie par une application	13
III.6	Composition des applications	14
III.7	Applications injectives, surjectives, bijectives	15
III.8	Utilisation des applications caractéristiques	16
III.9	Familles d'éléments, familles d'ensembles	17
IV	Relations binaires	19
IV.1	Généralités	19
IV.2	Propriétés éventuelles des relations binaires	20
IV.3	Relations d'équivalence	20
IV.4	Relations d'ordre	21
IV.5	Majorants, minorants	22
IV.6	Applications entre ensembles ordonnés	23



I Un peu de logique

I.1 Assertions

Définition

Une *assertion* est un énoncé dont on peut dire, sans ambiguïté, s'il est *vrai* ou *faux*.

On lui attribue une valeur *booléenne* : $\begin{cases} V & \text{(ou 1) s'il est vrai} \\ F & \text{(ou 0) s'il est faux} \end{cases}$

Certaines assertions sont déclarées vraies à priori : ce sont les *axiomes*.

Sinon la véracité d'une assertion doit résulter d'une *démonstration*.

Définition

Les assertions démontrées (les résultats des démonstrations) sont appelées, suivant leur importance, *théorèmes* ou *propositions*.

Un *lemme* est un résultat préalable utile à une démonstration plus conséquente.

Un *corollaire* est une assertion vraie qui découle d'une démonstration précédente.

I.2 Opérations sur les assertions

Des "opérations" permettant de créer de nouvelles assertions à partir d'assertions existantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, etc. Il suffit pour cela d'indiquer quand ces nouvelles assertions sont vraies ou fausses, en fonction de la valeur logique des assertions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, etc.

Définition (*négation*)

Soit $\mathcal{A}$ une proposition.

On définit l'assertion $\overline{\mathcal{A}}$ (ou encore "non $\mathcal{A}$ ") de la manière suivante :

$\overline{\mathcal{A}}$ est vraie quand $\mathcal{A}$ est fausse, et fausse quand $\mathcal{A}$ est vraie.

Définition (*disjonction et conjonction*)

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.

On définit les assertions " $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ " (conjonction) et " $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ " de la manière suivante :

– " $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ " est vraie quand l'une au moins des deux assertions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ est vraie.

– " $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ " est vraie quand les deux assertions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont vraies.

Définition (*implication et équivalence*)

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.

– On définit l'assertion " $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ " (notée $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) de la manière suivante :

L'assertion $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie quand $\mathcal{A}$ est fausse (le "faux implique n'importe quoi") ou quand $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont vraies.

– On définit l'assertion " $\mathcal{A}$ équivaut à $\mathcal{B}$ " (notée $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$) de la manière suivante :

L'assertion $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

I.3 Tableaux de vérité

La définition des propositions précédentes est résumée dans les *tableaux de vérité* ci-dessous.

$\mathcal{A}$	$\overline{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	F	F	V

Les opérations précédentes peuvent être répétées pour former des assertions $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots)$ dépendant d'assertions initiales $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc.

Deux assertions $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots)$ et $\mathcal{Q}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots)$ ainsi formées sont dites *synonymes* (et on note $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$) si elles ont le même tableau de vérité.

I.4 Quelques synonymies classiques

Voici par exemple une redéfinition de l'implication : $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv (\overline{\mathcal{A}} \text{ ou } \mathcal{B})$.

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, etc. des assertions. On démontre les synonymies suivantes :

- Double négation : $\text{non}(\text{non } \mathcal{A}) \equiv \mathcal{A}$.
On dit que la négation est une opération *involution*.
- Idempotence : $\begin{cases} (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}) \equiv \mathcal{A} \\ (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}) \equiv \mathcal{A} \end{cases}$
- Commutativité : $\begin{cases} (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \equiv (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A}) \\ (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \equiv (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A}) \end{cases}$
- Associativité : $\begin{cases} ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})) \\ ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})) \end{cases}$
- Dualité : $\begin{cases} \text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \equiv ((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B})) \\ \text{non}(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \equiv ((\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})) \end{cases}$
- Double implication : $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \equiv ((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$.
- Distributivité : $\begin{cases} (\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})) \equiv ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C})) \\ (\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})) \equiv ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C})) \end{cases}$

Proposition (deux figures classiques du raisonnement)

- Les deux synonymies suivantes sont à la base de raisonnements mathématiques classiques :
- Par la contraposée : $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv ((\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A}))$.
 - Par l'absurde : $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \equiv \text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \text{non } \mathcal{B})$.

Quand on énonce une assertion, c'est pour affirmer qu'elle est vraie. D'ailleurs " $\mathcal{A}$ est vraie" est synonyme de l'assertion " $\mathcal{A}$ " (et synonyme de " $(\mathcal{A}$ est vraie) est vraie" ...).

On écrira par exemple " $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ " plutôt que d'écrire " $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie".

Proposition (deux implications classiques)

Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Les implications ci-dessous sont vraies :

- Le *syllogisme* : $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$.
- La *disjonction des cas* : $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C})$.

Remarque :

Les assertions " $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ " et " $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ " sont proches. La première exprime que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies ou fausses en même temps, indépendamment de la signification des assertions sur lesquelles elles sont construites, en toute généralité. La deuxième exprime plutôt la constatation que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies ou fausses en même temps, dans un contexte précis.

Il n'y a donc pas beaucoup de risque à les confondre.

I.5 Conditions nécessaires et/ou suffisantes

On considère deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

On suppose que " $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ " est vraie.

Le tableau ci-contre illustre les trois cas possibles :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
F	V	V
F	F	V

Définition

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux assertions. Pour exprimer que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit indifféremment :

- L'assertion $\mathcal{A}$ est une *condition suffisante* de l'assertion $\mathcal{B}$.
- L'assertion $\mathcal{B}$ est une *condition nécessaire* de l'assertion $\mathcal{A}$.
- Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie) il *faut* que $\mathcal{B}$ (soit vraie).
- Pour que $\mathcal{B}$ (soit vraie), il *suffit* que $\mathcal{A}$ (soit vraie).
- $\mathcal{B}$ (est vraie) *si* $\mathcal{A}$ (est vraie).
- $\mathcal{A}$ (est vraie) *seulement si* $\mathcal{B}$ (est vraie).

Définition

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux assertions. Pour exprimer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit indifféremment :

- $\mathcal{A}$ est une condition *nécessaire et suffisante* (CNS) de $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{A}$ (est vraie) *si et seulement si* $\mathcal{B}$ (est vraie).
- Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), *il faut et il suffit* que $\mathcal{B}$ (soit vraie).

Dans ces énoncés on peut bien sûr échanger le rôle de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

I.6 Prédicats et quantificateurs

Définition

Un *prédicat* est un énoncé $\mathcal{A}$ contenant une ou plusieurs *variables* $x, y, \dots$ qu'on peut remplacer par des éléments de tel ou tel ensemble, produisant ainsi des assertions $\mathcal{A}(x, y, \dots)$ valides.

Dans un premier temps, on ne considérera que des prédicats à une variable x (x pouvant être remplacé par les éléments d'un ensemble E , appelé le *référéntiel* du prédicat).

Si pour un élément x de E , l'assertion $\mathcal{A}(x)$ est vraie, on dit que x *vérifie la propriété* $\mathcal{A}$, et on écrit simplement " $\mathcal{A}(x)$ " plutôt que " $\mathcal{A}(x)$ est vraie".

Définition (quantificateurs)

- Soit $\mathcal{A}$ un prédicat de référéntiel E .
- " $\exists x \in E, \mathcal{A}(x)$ " exprime qu'au moins un élément x de E vérifie la propriété $\mathcal{A}$.
On dit que " $\exists$ " est le *quantificateur existentiel*.
 - " $\forall x \in E, \mathcal{A}(x)$ " exprime que tout élément x de E vérifie la propriété $\mathcal{A}$.
On dit que " $\forall$ " est le *quantificateur universel*.
 - " $\exists! x \in E, \mathcal{A}(x)$ " exprime qu'un et un seul élément x de E vérifie la propriété $\mathcal{A}$.

Proposition (négation d'une proposition avec quantificateur)

- Soit $\mathcal{A}$ un prédicat de référéntiel E . On a les synonymies suivantes :
- $\text{non} (\exists x \in E, \mathcal{A}(x)) \equiv (\forall x \in E, \text{non } \mathcal{A}(x)).$
 - $\text{non} (\forall x \in E, \mathcal{A}(x)) \equiv (\exists x \in E, \text{non } \mathcal{A}(x)).$

On peut construire des assertions avec plusieurs quantificateurs, notamment sur des prédicats $\mathcal{A}(x, y, \dots)$ à plusieurs variables.

Dans ce cas, on prendra garde à l'ordre de ces quantificateurs.

Exemple : " $\forall x \in E, \exists y \in F, \mathcal{A}(x, y)$ " n'est pas synonyme de " $\exists y \in F, \forall x \in E, \mathcal{A}(x, y)$ ".

On le vérifie avec les assertions : " $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y$ " et " $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \leq y$ ".

I.7 Quelques bons conseils

Dans le raisonnement logique, la syntaxe est primordiale.

Elle va de pair avec la clarté du style.

Quelques bonnes habitudes doivent être prises :

- Indiquer clairement les hypothèses de la démonstration, et quel résultat on veut obtenir.
- Mettre en évidence les liens logiques entre les phases successives de la démonstration.
Le symbole " $\Rightarrow$ " n'est pas innocent. Son emploi doit être justifié.



- Ne pas mélanger les symboles “ $\Rightarrow$ ” et “ $\Leftrightarrow$ ”.
- Dans une proposition “à tiroirs”, utiliser des parenthèses pour lever toute ambiguïté.
Ainsi la proposition $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ n’est pas synonyme de $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$.
- Eviter d’utiliser exclusivement le langage de la logique formelle (propositions, quantificateurs) là où on peut s’exprimer “en français”.
En particulier, on ne mélangera pas les deux styles.
On évitera d’écrire, par exemple : “pour tout $x \in E, \dots$ ”).
- Varier le style, pour éviter toute sécheresse.
Le mot “donc”, par exemple, possède plusieurs synonymes :
“on en déduit”, “il s’ensuit”, “par conséquent”, etc.



II Le langage des ensembles

II.1 Ensembles et éléments

On ne se risque pas à donner une définition de ces notions premières.

- On dit qu'un *ensemble* E est constitué d'*éléments* et qu'un élément a *appartient* à E (on écrit : $a \in E$) ou n'appartient pas à E (on écrit : $a \notin E$).

Deux ensembles E, F sont dits *égaux* (on note $E = F$) s'ils sont formés des mêmes éléments.

Par convention l'*ensemble vide*, noté $\emptyset$, est un ensemble ne contenant aucun élément.

- Un ensemble E peut être *fini* ou *infini*.

S'il est fini, il peut être donné en *extension*, c'est-à-dire par la liste (non ordonnée) de ses éléments. Par exemple $E = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Dans une écriture comme $E = \{a, b, c, \dots\}$ les éléments a, b, c , etc. sont à priori supposés distincts. L'ordre dans lequel ils sont donnés n'a aucune importance.

- Un ensemble $E = \{a\}$, formé d'un seul élément, est appelé un *singleton*.

Un ensemble $E = \{a, b\}$, formé de deux éléments distincts, est appelé une *paire*.

- S'il est infini (ou même fini), E peut être donné en *compréhension*, c'est-à-dire par une propriété caractérisant ses éléments.

Par exemple $P = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ premier}\}$ est l'ensemble des nombres premiers.

$E = \{n \in P, n \leq 11\}$ est alors l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à 11 (on retrouve l'ensemble $E = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.)

- Il y a bien d'autres conventions pour définir ou nommer des ensembles. Par exemple :

- ◇ Si a, b sont deux réels, $[a, b[$ est l'ensemble des réels x qui vérifient $a \leq x < b$.
- ◇ Si E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E .
- ◇ Certains ensembles ont des noms consacrés par l'usage : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$

II.2 Opérations sur les ensembles

A partir de deux ensembles E et F , on peut en construire d'autres :

Définition (*intersection et réunion*)

Soit E et F deux ensembles.

$E \cap F$ est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans E et dans F .

$E \cup F$ est l'ensemble formé des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles E et F .

Définition (*ensembles disjoints*)

On dit que E, F sont *disjoints* si $E \cap F$ est vide.

Dans ce cas, on dit que $E \cup F$ est une *d'union disjointe*.

**Remarque**

On ne confondra pas *distincts* et *disjoints* :

Dire que E et F sont distincts, c'est dire : $(\exists x \in E, x \notin F)$ ou $(\exists x \in F, x \notin E)$.

Dire que E et F sont disjoints, c'est dire : $(\forall x \in E, x \notin F)$ et $(\forall x \in F, x \notin E)$.

Définition (*différence et différence symétrique*)

Soit E et F deux ensembles.

– *Différence*

L'ensemble $E \setminus F$ est formé des éléments qui sont dans E mais qui ne sont pas dans F .

– *Différence symétrique*

On note $E \Delta F$ l'ensemble $(E \cup F) \setminus (E \cap F)$.

C'est l'ensemble des éléments qui sont dans un et un seul des deux ensembles E et F .

Remarques

– On dit encore que $E \setminus F$ est le *complémentaire* de F dans E et on peut le noter $\mathbf{C}_E F$.

– Une définition équivalente de la différence symétrique est :

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \text{ (c'est une union disjointe).}$$

Définition (*n -uplets et produit cartésien*)

Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles (non nécessairement distincts deux à deux), avec $n \geq 2$.

– Pour tout entier k (compris entre 1 et n), soit x_k un élément de l'ensemble E_k .

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelé un *n -uplet* de *composantes* $x_1, x_2, \dots, x_n$ (dans cet ordre).

– On appelle *produit cartésien* de $E_1, E_2, \dots, E_n$, et on note $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, l'ensemble des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Par exemple, $E \times F = \{(a, b), a \in E, b \in F\}$.

Remarques

– Un n -uplet est donc le moyen de regrouper n éléments dans un ordre bien défini.

– On parle de *couple* si $n = 2$, de *triplet* si $n = 3$, de *quadruplet* si $n = 4$, etc.

– On ne confondra pas (par exemple) la *paire* $\{a, b\}$ avec le *couple* (a, b) :

◇ Si a et b sont différents, les couples (a, b) et (b, a) désignent en effet deux objets différents, alors que $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ désignent le même ensemble.

◇ De même si $a = b$: l'ensemble $\{a, b\}$ se réduit au singleton $\{a\}$, alors que (a, a) est toujours un couple (mais dont les deux composantes sont égales).

– Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont égaux à un même ensemble E , on note E^n plutôt que $E \times E \times \dots \times E$.

– Par définition, la *diagonale* de E^2 est l'ensemble $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$.

II.3 Parties d'un ensemble

Définition

Soit E et F deux ensembles.

– On dit qu'un ensemble F est *inclus* dans un ensemble E , et on note $F \subset E$, pour exprimer que tout élément de F est également élément de E .

On dit encore que E *contient* F , ou que F est une *partie* (ou un *sous-ensemble*) de E .

– On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E .

Remarques

– Evidemment, si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

– On a l'équivalence $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.

De même : $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset E \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{P}(E)$.

Les ensembles E et $\emptyset$ sont toujours des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

– La réunion, l'intersection, la différence symétrique sont des *opérations binaires* sur $\mathcal{P}(E)$, en ce sens qu'à deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ elles associent un élément de $\mathcal{P}(E)$.

– Si aucune confusion n'est à craindre sur l'ensemble E , on notera $\bar{A}$ le complémentaire d'une partie A de E : c'est encore une partie de E .

Le passage au complémentaire est donc une opération *unaire* sur $\mathcal{P}(E)$.

II.4 Opérations sur les parties d'un ensemble

On observe que si $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(x)$ sont deux prédicats basés sur E , alors :

– $\{x \in E, \mathcal{A}(x)\} \cup \{x \in E, \mathcal{B}(x)\} = \{x \in E, \mathcal{A}(x) \text{ ou } \mathcal{B}(x)\}$.

– $\{x \in E, \mathcal{A}(x)\} \cap \{x \in E, \mathcal{B}(x)\} = \{x \in E, \mathcal{A}(x) \text{ et } \mathcal{B}(x)\}$.

– Le complémentaire dans E de $\{x \in E, \mathcal{A}(x)\}$ est $\{x \in E, \text{non } \mathcal{A}(x)\}$.

De cette remarque et des propriétés des opérations sur les assertions, on déduit les propriétés suivantes des opérations sur $\mathcal{P}(E)$. A, B, C désignent ici trois parties quelconques de E .

– *Double passage au complémentaire* : $\overline{\bar{A}} = A$.

– *Idempotence* :
$$\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$$

– *Commutativité* :
$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$$

– *Associativité* :
$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$$



- Distributivité :
$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$
- Dualité :
$$\begin{cases} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases}$$
- Partie vide et partie pleine :
 - $$\begin{cases} A \cup \emptyset = A & (\emptyset \text{ est neutre pour la réunion}) \\ A \cap \emptyset = \emptyset & (\emptyset \text{ est absorbant pour l'intersection}) \\ A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} A \cap E = A & (E \text{ est neutre pour l'intersection}) \\ A \cup E = E & (E \text{ est absorbant pour la réunion}) \\ A \cup B = E \Leftrightarrow \overline{B} \subset A \end{cases}$$
- Propriétés de l'inclusion :
 - $$\begin{cases} A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ et } (B \subset A) \\ A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \\ (A \cup B) \subset C \Leftrightarrow (A \subset C) \text{ et } (B \subset C) \\ A \subset (B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ et } (A \subset C) \end{cases}$$
- Propriétés de la différence symétrique :
 - $$\begin{cases} A \Delta B = B \Delta A & (\text{Commutativité}) \\ A \Delta A = \emptyset, \quad A \Delta E = \overline{A} \\ A \Delta \emptyset = A & (\emptyset \text{ est neutre}) \\ A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C & (\text{Associativité}) \\ A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) & (\text{Distributivité de } \cap \text{ sur } \Delta) \end{cases}$$

III Applications

III.1 Généralités

Définition

Une *application* f de E vers F est la donnée d'une partie G de $E \times F$ (appelée *graphe* de l'application) vérifiant la propriété suivante :

Pour tout x de E , il existe un et un seul y de F tel que le couple (x, y) appartienne à G .

On dit que y est *l'image* de x par f , ou encore que x est *un antécédent* de y par f .

On note $y = f(x)$. On dit que E est *l'ensemble de départ* et F *l'ensemble d'arrivée* de f .

Définition

Soit E et F deux ensembles.

On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications de E vers F .

Si les deux ensembles E et F sont égaux, on note plus simplement $\mathcal{F}(E)$.

Notations et remarques

- Une application f de E vers F est souvent notée $E \xrightarrow{f} F$ ou $f : E \longrightarrow F$
 $x \mapsto y=f(x)$
- Si E est fini, on peut représenter $f : E \rightarrow F$ par la donnée de chacune des images par f .
On définit par exemple une application f de $E = \{a, b, c, d, e\}$ vers $F = \{t, u, v, w\}$ par :

$$f(a) = t, f(b) = t, f(c) = v, f(d) = w, f(e) = w$$

Comme on le voit sur cet exemple, tout élément de E possède une image et une seule (c'est la définition même d'une application) mais un élément donné de F peut très bien :

- ◇ ne posséder aucun antécédent (l'élément u n'en a pas)
- ◇ ou posséder un seul antécédent (celui de v est c)
- ◇ ou en posséder plusieurs (t et w en ont chacun deux) ou une infinité (pas ici...!)
- Deux applications f et g sont *égales* si :
 - ◇ elles ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F .
 - ◇ elles ont le même graphe $G \subset E \times F$ c'est-à-dire : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

III.2 Exemples d'applications

Définition (*Application Identité*)

Soit E un ensemble.

On définit l'application *identité* de E dans E , notée Id_E , par : $\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x$.

**Définition** (*Applications constantes*)

Une application f de E dans F est dite *constante* s'il existe un élément α de F , tel que, pour tout x de E , $f(x)$ soit égal à α .

Définition (*Applications caractéristiques*)

Soit A une partie d'un ensemble E .
On appelle *application caractéristique* de A , et on note χ_A , l'application de E vers $\{0, 1\}$, définie par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

III.3 Prolongements et restrictions

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .

Il y a plusieurs moyens de créer de nouvelles applications en ne modifiant que l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée de f .

Extension de l'ensemble d'arrivée

Pour tout ensemble F' contenant F , on peut encore dire que f est une application de E vers F' (ce n'est pas vrai si F' est une partie de F , sauf si F' contient l'image de f , c'est-à-dire tous les éléments de F qui ont au moins un antécédent).

Restriction d'une application

Soit E' une partie de E .

On définit une application g , de E' vers F , en posant : $\forall x \in E', g(x) = f(x)$.

On dit que g est *la restriction* de f à E' .

Prolongements d'une application

Soit E'' un ensemble contenant E .

On dit qu'une application h de E'' vers F est *un prolongement* de f si f est la restriction de h à E , c'est-à-dire si : $\forall x \in E, h(x) = f(x)$.

On notera qu'on parle de *la* restriction et d'*un* prolongement.

Par exemple, si f est l'identité de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même, elle possède une infinité de prolongements à $\mathbb{R}$ tout entier, parmi lesquels :

- ◇ L'application identité de $\mathbb{R}$.
- ◇ L'application "valeur absolue", de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
- ◇ L'application h définie par : $h(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, et qui est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^-$.

III.4 Image d'une partie par une application

Soit E, F deux ensembles, et f une application de E vers F .

Définition

- Soit $A \subset E$. On appelle *image* de A par f le sous-ensemble $f(A) = \{f(a), a \in A\}$ de F .
 $f(A)$ est donc l'ensemble des images par f des éléments de A .
On peut écrire : $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, f(x) = y$.

On définit ainsi une nouvelle application de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(F)$: à toute partie de E on associe en effet une partie de F .

Cette application est encore notée f . On ne confondra pas ces deux significations de f !

Cas particuliers et exemples

- L'image de l'ensemble vide par f est l'ensemble vide : $f(\emptyset) = \emptyset$.
Pour tout a de E , $f(\{a\}) = \{f(a)\}$ (on a là les deux acceptations de f).
- $f(E)$ est l'ensemble de toutes les images par f . On dit que c'est l'*ensemble image* de f .
Si on reprend l'exemple vu en 1.C.1 $f(\{a, b, c\}) = \{t, v\}$ et $f(\{d, e\}) = \{w\}$.

Proposition

- Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .
Soit A et B deux parties quelconques de E . On a
- ◇ $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
 - ◇ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - ◇ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- En revanche, il n'y a pas de règle générale permettant de comparer $f(\overline{A})$ et $\overline{f(A)}$.

III.5 Image réciproque d'une partie par une application

Définition

- Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .
Soit B une partie de F . L'*image réciproque* de B par f , notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B : Autrement dit : $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.
C'est la partie de E formée par les antécédents des éléments de B .
On peut donc écrire : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Remarques

- On définit ainsi une application f^{-1} de $\mathcal{P}(F)$ vers $\mathcal{P}(E)$: à toute partie de F on associe en effet une partie de E . Mais cette application ne doit pas être confondue (quand f est bijective) avec la bijection réciproque f^{-1} (voir plus loin.)
- Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F . Alors on a :

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset ; \quad f^{-1}(F) = E ; \quad \forall b \in F, f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E, f(x) = b\}.$$
- Si on reprend l'exemple donné en 1.3.1,

$$f^{-1}(\{u\}) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{v\}) = \{c\}, \quad f^{-1}(\{w\}) = \{d, e\} \quad \text{et} \quad f^{-1}(\{t, w\}) = \{a, b, d, e\}.$$

Proposition

- Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .
 Pour deux parties quelconques A et B de F , on a les égalités :
- $$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}, \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

Complément

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .

À titre d'exercice, on pourra vérifier les deux résultats suivants :

- Pour toute partie A de E : $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- Pour toute partie B de F : $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

III.6 Composition des applications

Définition

- Soit E, F, G trois ensembles. Soit f dans $\mathcal{F}(E, F)$ et g dans $\mathcal{F}(F, G)$.
 La *composée* de f par g , notée $g \circ f$, est l'application de E vers G , définie par :
 $\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposition

- Soit E, F, G, H quatre ensembles. Soit f dans $\mathcal{F}(E, F)$, g dans $\mathcal{F}(F, G)$ et h dans $\mathcal{F}(G, H)$.
 Alors on a l'égalité $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Remarques et propriétés

- On exprime cette propriété (qui ne devra jamais être redémontrée) en disant que *la loi de composition des applications est associative*.
- De cette propriété il découle qu'une composition répétée, comme $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$, ne nécessite pas de parenthèses.

- Soit f dans $\mathcal{F}(E, F)$. Alors $\text{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \text{Id}_E = f$.
- Si f appartient à $\mathcal{F}(E)$, on pose par convention $f^0 = \text{Id}_E$.
On définit alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = f^{n-1} \circ f = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f$ (n fois).
- Soit f dans $\mathcal{F}(E, F)$ et g dans $\mathcal{F}(F, E)$.
On peut donc former à la fois $g \circ f$ (de E dans E) et $f \circ g$ (de F dans F).
Ces deux applications sont en général distinctes (notamment si $E \neq F$!).
- Si f et g appartiennent à $\mathcal{F}(E)$, on dit que f et g *commutent* si $g \circ f = f \circ g$.
On note que Id_E commute avec toute application de E dans E .
De même, les “puissances” f^n d’une application f commutent entre elles.

III.7 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition

Soit f une application de E dans F .

- On dit que f est une application *injective* (ou encore une *injection*) si tout élément y de F possède *au plus un antécédent* par f .
- On dit que f est une application *surjective* (ou encore une *surjection*) si tout élément y de F possède *au moins un antécédent* par f , autrement dit si : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
- On dit que f est une application *bijective* (ou encore une *bijection*) si f est à la fois injective et surjective, c’est-à-dire si tout élément y de l’ensemble F possède *un antécédent x et un seul* dans E : $\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$.

Définitions équivalentes et remarques

- Une définition équivalente de l’injectivité de f est : $\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
Autrement dit, une application est injective si elle “conserve les différences”.
Une autre définition équivalente (très utile) est : $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- Une définition équivalente de la surjectivité de f est : $f(E) = F$.
On dit souvent que f est une surjection de E *sur* F (plutôt que *dans* F .)

Proposition (Une caractérisation de l’injectivité)

Soit f une application de l’ensemble E vers l’ensemble F .

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- L’application f est injective.
- Pour toutes parties A, B de E , on a : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Proposition (Bijection réciproque)

Soit f une bijection de l'ensemble E sur l'ensemble F .

On définit une application de F vers E en associant à tout y de F son seul antécédent x .

Cette application, notée f^{-1} , vérifie donc : $\forall x \in E, \forall y \in F, x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

On a alors les égalités : $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$, et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

L'application f^{-1} est également bijective : on l'appelle la *bijection réciproque* de f .

On a enfin l'égalité $(f^{-1})^{-1} = f$: l'application f est la bijection réciproque de f^{-1} .

Rappel : on ne confondra pas l'application f^{-1} (bijection réciproque de f), de F vers E , avec l'application $\overset{-1}{f}$ de $\mathcal{P}(F)$ vers $\mathcal{P}(E)$, qui existe même quand f n'est pas bijective.

Proposition

Soit f dans $\mathcal{F}(E, F)$ et g dans $\mathcal{F}(F, G)$.

- Si f et g sont injectives (resp. surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Proposition

Soit f dans $\mathcal{F}(E, F)$. Pour montrer que l'application f est bijective, il suffit de trouver g dans $\mathcal{F}(F, E)$ telle que : $g \circ f = \text{Id}_E$, et $f \circ g = \text{Id}_F$. On a alors $g = f^{-1}$.

Définition (applications involutives)

Soit f dans $\mathcal{F}(E)$. On dit que f est *involutive* si $f \circ f = \text{Id}_E$.

Cela équivaut à dire que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

Exemples

- L'application Id_E est involutive, ou encore les symétries dans un espace affine.
- L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
- L'application $A \mapsto \overline{A}$ est une involution de $\mathcal{P}(E)$.
- L'application $z \mapsto \bar{z}$ est une involution de $\mathbb{C}$.

III.8 Utilisation des applications caractéristiques

Opérations sur les applications numériques

Soit f, g deux applications définies sur un ensemble E , à valeurs réelles.

Soit α un nombre réel.

On définit les applications $f + g$, fg et αf de la manière suivante :

$$\diamond \forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$



$$\diamond \forall x \in E, (fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\diamond \forall x \in E, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Par abus de langage, on note encore α l'application constante prenant la valeur α .

En particulier $\chi_E = 1$ et $\chi_\emptyset = 0$.

Propriétés

L'application χ , qui envoie A sur χ_A , est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$.

Toute application f de E vers $\{0, 1\}$ est en effet la fonction caractéristique d'une unique partie A de E , définie par : $A = \{x \in E, f(x) = 1\}$.

En particulier, deux parties A et B de E sont donc égales si et seulement si leurs applications caractéristiques χ_A et χ_B sont identiques : c'est parfois un bon moyen de démontrer l'égalité entre deux parties d'un ensemble.

Proposition

Soit A et B deux parties de E . On a les égalités suivantes :

$$\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A \qquad \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B \qquad \chi_{A \setminus B} = \chi_A (1 - \chi_B)$$

Les parties A et B sont disjointes $\Leftrightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$.

Enfin, on a $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B = (\chi_A - \chi_B)^2 = |\chi_A - \chi_B|$

III.9 Familles d'éléments, familles d'ensembles

Soit I un ensemble dont les éléments seront appelés *indices*. Soit E un ensemble.

Définition (familles d'éléments d'un ensemble)

Toute application x de I vers E est appelée une *famille d'éléments* de E , *indiquée* par I .

On note x_i plutôt que $x(i)$, et on écrit $(x_i)_{i \in I}$ cette famille d'éléments.

On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indicées par I : c'est donc une autre manière de désigner l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$.

Remarques et notations

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite *finie* ou *infinie*, selon que l'ensemble I est fini ou infini.
- On ne confondra pas la famille $(x_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire l'application x , avec l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$ c'est-à-dire l'ensemble image de cette application.

En particulier, une famille infinie peut n'être constituée que d'un nombre fini d'éléments (et par exemple un seul si l'application x est constante !)

- Si I est un intervalle d'entiers $[m, n]$, la famille est notée $(x_i)_{m \leq i \leq n}$.
- Si les x_i sont dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, leur somme et leur produit sont alors notés $\sum_{i=m}^n x_i$ et $\prod_{i=m}^n x_i$.

**Définition** (*famille de parties d'un ensemble*)

- || Toute application de I vers $\mathcal{P}(E)$ est appelée une *famille de parties* de E , indicée par I .
|| Une telle famille s'écrit par exemple $(E_i)_{i \in I}$ (si on appelle E_i l'image de i par l'application).

Opérations sur les familles de parties

- Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de l'ensemble E .

La réunion et l'intersection de cette famille sont les parties de E définies par :

$$\diamond \bigcup_{i \in I} E_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in E_i\} \quad (\text{éléments de } E \text{ appartenant à au moins un } E_i)$$

$$\diamond \bigcap_{i \in I} E_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in E_i\} \quad (\text{éléments de } E \text{ appartenant à tous les } E_i).$$

- Si I est un intervalle d'entiers $[m, n]$, on notera plutôt $\bigcup_{i=m}^n E_i$ et $\bigcap_{i=m}^n E_i$.

Définition (*partitions d'un ensemble*)

- || On dit qu'une famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de E constitue une *partition* de E si :
– Aucun des ensembles E_i n'est vide : $\forall i \in I, E_i \neq \emptyset$.
– Les E_i sont disjoints deux à deux : $\forall (i, j) \in I^2$, avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$.
– La réunion des ensembles E_i est égale à E tout entier : $\bigcup_{i \in I} E_i = E$.
|| Dans ces conditions, tout élément x de E appartient à un sous-ensemble E_i unique.

IV Relations binaires

IV.1 Généralités

Soit E et F deux ensembles.

Définition

On appelle *relation* $\mathcal{R}$ de E vers F toute partie R du produit cartésien $E \times F$.

La partie R est appelée le *graphe* de la relation $\mathcal{R}$.

On dit qu'un élément x de E est *en relation* avec un élément y de F , pour la relation $\mathcal{R}$, si le couple (x, y) appartient au graphe R .

On exprime cette situation en écrivant $x \mathcal{R} y$.

Si $E = F$ (cas fréquent) on dit que $\mathcal{R}$ est une *relation binaire* sur E .

Exemples

– La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E : $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B$.

– La relation de divisibilité sur les entiers relatifs : $m \mathcal{R} n \Leftrightarrow m$ divise n .

– Dans $\mathbb{Z}$, et si a non nul, on définit la relation de *congruence modulo* a :
 $m \mathcal{R} n \Leftrightarrow m - n$ est divisible par a . On note le plus souvent $m \equiv n (a)$.

– Sur tout ensemble E , on peut définir la *relation égalité* : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y$.
Le graphe de cette relation est la diagonale $\Delta(E) = \{(x, x), x \in E\}$.

– Soit E et F deux ensembles quelconques.

On définit la *relation universelle* de E vers F par : $\forall (x, y) \in E \times F, x \mathcal{R} y$.

Le graphe de cette relation est l'ensemble $E \times F$ tout entier.

– Soit E un ensemble *fini* et $\mathcal{R}$ une relation sur E .

On peut représenter $\mathcal{R}$ en donnant la liste de tous les couples (x, y) de E^2 tels que $x \mathcal{R} y$.

Voici par exemple la description d'une relation sur $E = \{a, b, c, d, e, f\}$.

	a	b	c	d	e	f
a	*					
b	*					*
c			*			
d		*		*	*	*
e	*				*	
f				*		

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mathcal{R} a \\ b \mathcal{R} a, \quad b \mathcal{R} f \\ c \mathcal{R} c \\ d \mathcal{R} b, \quad d \mathcal{R} d, \quad d \mathcal{R} e, \quad d \mathcal{R} f \\ e \mathcal{R} a, \quad e \mathcal{R} e \\ f \mathcal{R} d \end{array} \right.$$

Restriction d'une relation

Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E , et si F est une partie de E , alors on peut définir la restriction $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$ à l'ensemble F .

Le graphe de $\mathcal{S}$ est l'intersection de $F \times F$ et du graphe de $\mathcal{R}$.

Par exemple, Si P est l'ensemble des entiers naturels premiers, la restriction à P de la relation de divisibilité n'est autre que la relation d'égalité sur P .

IV.2 Propriétés éventuelles des relations binaires

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E .

- $\mathcal{R}$ est dite *réflexive* si : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$.
- $\mathcal{R}$ est dite *symétrique* si : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.
- $\mathcal{R}$ est dite *transitive* si : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.
- $\mathcal{R}$ est dite *antisymétrique* si : $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$.

Remarques

- L'antisymétrie s'écrit aussi : $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \text{non}(y \mathcal{R} x)$
- Si $\mathcal{R}$ est symétrique, on dira de deux éléments x, y de E qu'ils sont ou qu'ils ne sont pas en relation (x et y ayant alors des rôles identiques).
- L'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie.

La relation "égalité", par exemple, possède les deux propriétés, alors que la relation donnée en exemple sur $\{a, b, c, d, e, f\}$ n'est ni symétrique (e est en relation avec a mais a n'est pas en relation avec e) ni antisymétrique (les éléments d et f sont en relation l'un avec l'autre, bien qu'ils soient distincts).

- A titre d'exercice, on pourra vérifier que si une relation est à la fois symétrique, antisymétrique, et réflexive, alors c'est la relation d'égalité.

IV.3 Relations d'équivalence

Définition

On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'équivalence* si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Pour tout x de E , l'ensemble des éléments en relation avec x est appelé la *classe d'équivalence* de x , et notée $\mathcal{C}(x)$ (ou $\dot{x}$, ou $\bar{x}$) : $\mathcal{C}(x) = \{y \in E, x \mathcal{R} y\}$.

Conséquences de la définition

- La relation $\mathcal{R}$ étant réflexive, tout élément x de E appartient à sa propre classe d'équivalence. En particulier, aucune classe d'équivalence n'est vide.
- Soit x et y dans E : si $x \mathcal{R} y$, alors $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$. Sinon $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \emptyset$.
Deux classes d'équivalence sont donc ou bien identiques ou bien disjointes.
- Une classe d'équivalence $\mathcal{C}$ est entièrement déterminée par la donnée de l'un quelconque de ses éléments x (on dira que x est un *représentant* de $\mathcal{C}$).

Proposition (partitions et relations d'équivalence)

Soit E un ensemble.

- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .

Soit Ω un sous-ensemble de E obtenu en choisissant dans chaque classe d'équivalence $\mathcal{C}$ un représentant x unique : la famille $(\mathcal{C}(x))_{x \in \Omega}$ est une partition de l'ensemble E . Autrement dit, les différentes classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ définissent une partition de E .

- Réciproquement, soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition de E .

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists i \in I, \{x, y\} \subset E_i$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E , et les sous-ensembles E_i sont les classes d'équivalence de E pour $\mathcal{R}$.

Exemples de relations d'équivalence

- Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

On définit une relation d'équivalence sur E en posant : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

La classe d'équivalence de x est l'image réciproque par f du singleton $\{f(x)\}$.

Par exemple, si Ω est un point fixé du plan affine, on définit une relation sur ce plan en posant $M \mathcal{R} N \Leftrightarrow d(\Omega, M) = d(\Omega, N)$: l'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble des cercles de centre Ω .

- La relation définie sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites du plan affine par : $D \mathcal{R} \Delta \Leftrightarrow D // \Delta$.

Les classes d'équivalence correspondent aux différentes "directions" de droites.

- La relation définie sur $\mathbb{Z}$ par $x \equiv y (n)$.

Il y a exactement n classes d'équivalence.

Les entiers $0, 1, 2, \dots, n-1$ constituent une famille de représentants de chaque classe.

L'ensemble des différentes classes d'équivalence s'écrit donc : $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$.

IV.4 Relations d'ordre

Définition

On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'ordre* si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

On note souvent $\leq$ une telle relation.

On dit alors que $(E, \leq)$ est un *ensemble ordonné*.

Une relation d'ordre sur E est donc caractérisée par :

- $\forall x \in E, x \leq x$
- $\forall x, y, z \in E, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
- $\forall x, y \in E, (x \leq y) \text{ et } (y \leq x) \Rightarrow x = y$

Définition (ordre total ou ordre partiel)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E .

- Deux éléments x et y de E sont dits *comparables* (pour $\leq$) si $x \leq y$ ou si $y \leq x$.
- Si deux éléments quelconques x et y sont toujours comparables, on dit que $\leq$ est une relation d'ordre *total* : l'ensemble E est dit *totalement ordonné* par $\leq$.
- Sinon (c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables x et y) on dit que $\leq$ est une relation d'ordre *partiel* (l'ensemble E est dit *partiellement ordonné* par $\leq$).

Exemples

– Relation d'ordre inverse

Si $\leq$ est une relation d'ordre sur E , on définit encore une relation d'ordre sur E , notée $\geq$, en posant : $\forall (x, y) \in E^2, x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$.

– Sur les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, on dispose d'une relation d'ordre total, notée $\leq$.

– Si on pose : $x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ et } x \neq y$, on définit une nouvelle relation (appelée souvent ordre strict) qui en fait n'est pas une relation d'ordre (elle n'est pas réflexive).

– On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ en posant : $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$.

Il s'agit d'un ordre partiel, sauf si E est vide ou se réduit à un élément.

Par exemple, si a et b sont distincts dans E , $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.

– La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Rappelons qu'on note $m \mid n$ (" m divise n ") s'il existe un entier q tel que $n = qm$.

C'est un ordre partiel. Par exemple 2, 3 sont non comparables (aucun ne divise l'autre).

– La divisibilité ne définit pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$; en effet si m est un entier relatif non nul, les entiers m et $-m$ se divisent mutuellement (le quotient vaut -1) bien qu'ils soient distincts : la relation n'est donc pas antisymétrique.

– Sur $\mathbb{R}^2$, on peut poser : $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x') \text{ et } (y \leq y')$.

C'est un ordre partiel : les couples $(1, 2)$ et $(4, 0)$, par exemple, ne sont pas comparables.

– Toujours sur $\mathbb{R}^2$, on peut poser : $(x, y) \leq (x', y')$ si $\begin{cases} x < x' \text{ ou} \\ (x = x') \text{ et } (y \leq y') \end{cases}$

on définit ainsi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

Cette relation (dont le modèle se généralise facilement à $\mathbb{R}^n$) est appelée *ordre lexicographique*, en référence à la relation d'ordre total qui permet de classer les mots du dictionnaire.

IV.5 Majorants, minorants

Définition (Majorants et minorants)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie non vide de E .

- On dit qu'un élément x de E est un *majorant* de A (ou qu'il *major*e la partie A) si x est comparable à tous les éléments de A et si, pour tout a de A , $a \leq x$.
- On dit qu'un élément x de E est un *minorant* de A (ou qu'il *minore* A) si x est comparable à tous les éléments de A et si, pour tout a de A , $x \leq a$.

Définition (Parties majorées, minorées, bornées)

Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. On dit que A est :

- *majorée* si l'ensemble de ses majorants est non vide.
- *minorée* si l'ensemble de ses minorants est non vide.
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit : A est bornée $\Leftrightarrow \exists (x, y) \in E^2, \forall a \in A, x \leq a \leq y$.

Proposition (Élément maximum, élément minimum)

Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Soit α un élément de A .

- On dit que α est un *élément maximum* de A (ou *plus grand élément* de A) s'il majore A .
Il n'existe au plus qu'un élément maximum de A : en cas d'existence, on le note $\max(A)$.
- On dit que α est un *élément minimum* de A (ou *plus petit élément* de A) s'il minore A .
Il n'existe au plus qu'un élément minimum de A : en cas d'existence, on le note $\min(A)$.

Exemples

- Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $A =]-\infty, 1[$ est majorée, mais non minorée (donc non bornée).
L'ensemble de ses majorants est $[1, +\infty[$. Le maximum de A n'existe pas.
- Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $B = [-2, +\infty[$ est minorée mais non majorée.
L'ensemble de ses minorants est $] -\infty, -2]$; $\min(B) = -2$.
- Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $C =]0, 1[$ est bornée, mais $\min(C)$ et $\max(C)$ n'existent pas.
- Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $D = [0, 1]$ est bornée. $\min(D) = 0$ et $\max(D) = 1$.
- Dans $(\mathbb{N}, \leq)$, toute partie non vide possède un plus petit élément. 0 est le minimum de $\mathbb{N}$.
- Si A est une partie finie non vide de $(E, \leq)$ totalement ordonné, $\min(A)$ et $\max(A)$ existent.
- Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $\emptyset$ est l'élément minimum de $\mathcal{P}(E)$, et E est son élément maximum.
Toute famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de E est minorée par $\bigcap_{i \in I} E_i$ et majorée par $\bigcup_{i \in I} E_i$.
- Dans $(\mathbb{N}, |)$, 1 est le minimum de $\mathbb{N}$. Toute famille finie $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est minorée par le pgcd des entiers a_k , et majorée par leur ppcm.

IV.6 Applications entre ensembles ordonnés

Définition

Soit f une application de l'ensemble E vers l'ensemble ordonné $(F, \leq)$.

On dit que f est *majorée* (resp. *minorée*, *bornée*), si l'ensemble image $f(E)$ est majoré (resp. minoré, borné) dans F .

Autrement dit :

- ◇ f est majorée $\Leftrightarrow \exists \beta \in F, \forall x \in E, f(x) \leq \beta$: on dit ici que f est majorée par β .
- ◇ f est minorée $\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, \forall x \in E, \alpha \leq f(x)$: on dit ici que f est minorée par α .
- ◇ f est bornée $\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in F^2, \forall x \in E, \alpha \leq f(x) \leq \beta$.

Remarques et Exemples

- On dit que f est majorée sur une partie A de E si la restriction de f à A est majorée (idem avec “minorée” et “bornée”).

Dans ce qui précède, il suffit de remplacer “ $\forall x \in E$ ” par “ $\forall x \in A$ ”.

- L’application de $\mathbb{R}$ dans lui-même, définie par $f(x) = \exp x$ est minorée par 0. Elle n’est pas majorée sur $\mathbb{R}$ mais elle est majorée sur $\mathbb{R}^-$ (par 1).
- L’application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sin x$ est bornée (elle est en effet majorée par 1 et minorée par -1).

Soit E et F deux ensembles ordonnés (on notera $\leq$ les deux relations d’ordre.)

Dans la suite, on notera $x < y$ pour dire : $(x \leq y)$ et $(x \neq y)$.

Définition (Applications monotones)

Soit f une application de E vers F .

- On dit que f est *croissante* si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est *décroissante* si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.
- L’application f est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Définition (Applications strictement monotones)

Soit f une application de E vers F .

- On dit que f est *strictement croissante* si : $\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- On dit que f est *strictement décroissante* si : $\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$.
- f est dite *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

- La monotonie stricte implique évidemment la monotonie “au sens large”.
- La monotonie de f dépend des relations d’ordre choisies sur E et F . Par exemple, si f est croissante de $(E, \leq)$ dans lui-même, elle est décroissante de $(E, \leq)$ dans $(E, \geq)$!
- Si E est l’un des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, la monotonie sera toujours considérée par référence à la relation d’ordre $\leq$ naturelle.

Exemples

- On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d’inclusion.
L’application f définie par : $\forall A \subset E, f(A) = \overline{A}$ est strictement décroissante.
Si $X \subset E$ est fixé, l’application g définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $g(A) = A \cup X$ est croissante.
- L’application f définie par $f(x) = E[x]$ (partie entière de x) est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L’application g définie par $g(x) = x + \sin x$ est strictement croissante.
- La suite u de terme général $u_n = 1/(n+1)$, considérée comme application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, est strictement décroissante.
- La fonction Π , qui à tout réel x associe le nombre d’entiers premiers inférieurs ou égaux à x , est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$.