

un élément d'un ensemble ne se répète pas à l'issue $\{a, b, c, d\}$



Ensembles, Applications, Relations

Ensemble:

$\{ \}$ ensemble

Chappelle un ensemble une collection d'objets appelés des éléments de cet ensemble. Dire que x est élément de E se note $x \in E$ sinon $x \notin E$

exemple: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\}$

Notation: On note $\emptyset$ l'ensemble vide

On appelle singleton un ensemble qui contient un seul élément.

Sous ensembles:

soit E et F deux ensemble.

On dit que E est une partie de F ou que E est inclus ds F ou que F contient E ssi tout élément de E est un élément de F et on note.

$E \subset F$



exemple:

$2 \in \mathbb{N} ; \{2\} \subset \mathbb{N}$

Rq: $\forall$ Ensemble on a toujours $\emptyset \subset E$.

En Pratique: Mg $E \subset F$

$\Leftrightarrow$ soit $x \in E$ et on Mg $x \in F \forall x \in E$ soit $E \subset F$.

Rq!!: $E = F \Leftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E$

↓
égalité
ensembliste.

L'ensemble $P(E)$:

l'ensemble de toute les parties de E est noté $P(E)$.

exemple: $E = \{a, b, c\}$
 $P(E) ?$

$P(E) = 2^n$

$2^3 = 8$

$P(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$

↑
ensemble des ensembles (éléments)

$\{a\} \in P(E)$

$\{\{a\}\} \subset P(E)$

$\emptyset \in P(E)$

$\{\emptyset\} \subset P(E)$

À retenir:

$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$

Opérations dans $P(E)$:

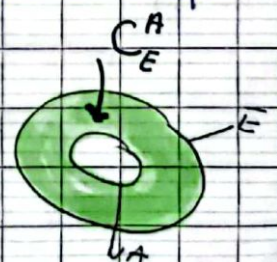
① - Complémentaire:

soit $A \in P(E)$. On appelle complémentaire de A dans E et on note

C_E^A

l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas ds A .

$C_E^A = \{x \in E ; x \notin A\}$



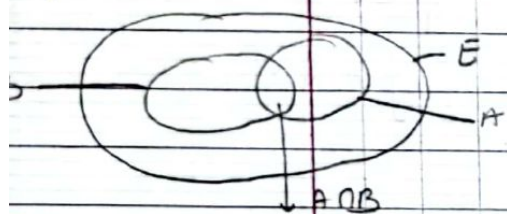
On note $C_E^A = \overline{A}$

complémentaire du complémentaire de A
c'est A.

exemple: $C_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^*$ $C_{\mathbb{R}^*} = \{0\}$
 $C_{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

2. Intersection:

Soit $A, B \in P(E)$ on note
par $A \cap B$ l'ensemble des éléments
qui sont à la fois dans A et B

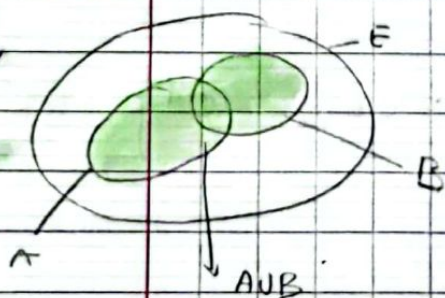


Rq1: A et B sont dit disjoints
ssi $A \cap B = \emptyset$.

Exemple $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$.

3. Réunion:

Soit A et B des parties de E
On note par $A \cup B$ c'est
l'ensemble des éléments qui
appartiennent à A ou B



A retenir:

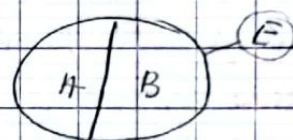
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Partition:

Def: On dit que A et B forment
une partition de E $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$$



Difference:

$$A, B \in P(E)$$

on note par $A \setminus B$ et on dit
A privé de B, c'est l'ensemble des
éléments de E qui sont dans A et
non dans B.

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in C_E^B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap C_E^B$$

$$A \setminus B = A \cap C_E^B = A \cap \overline{B}$$

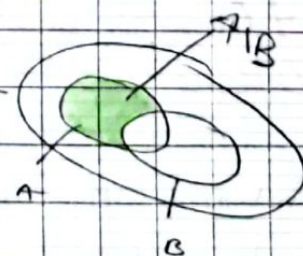
$A \cup B$

$$= A \setminus B \cup B \setminus A \cup (A \cap B)$$

$$A \setminus B = C_{A \cup B}^B$$

Exemple:

$$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^{++} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

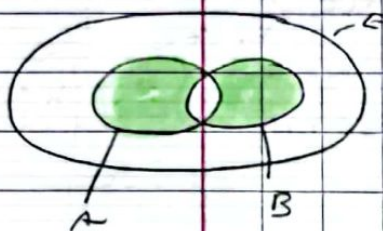


$$A, B \in \mathcal{P}(E)$$

Difference Symétrique: ^{défini}

On appelle, On note par $A \Delta B$
l'ensemble des éléments qui
appartiennent soit à A soit à B
mais pas aux deux à la fois.

$$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B = A \setminus B \cup B \setminus A$$



Exemple:

$$\mathbb{R}^+ \Delta \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^*$$

Rq: Δ

$$(1) A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$\text{et } A \cup B = B$$

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$\Rightarrow A \cup B = B$$

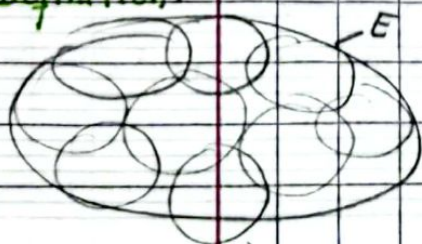
$$(2) A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$$

$$(3): A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A$$

$$(4): A \cup \bar{A} = E; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

↳ Partition.

Définition:



$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{10}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{10} A_i = \bigcap_{1 \leq i \leq 10} A_i$$

$$= \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{avec } I = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

Propriété:

soit E l'ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$1) A \cup \emptyset = A$$

$$2) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$3) A \cup A = A \cap A = A$$

$$4) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$5) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$6) A \subset B \Rightarrow \begin{matrix} C^B \\ E \end{matrix} \subset \begin{matrix} C^A \\ E \end{matrix}$$

$$7) \begin{matrix} C^{A \cup B} \\ E \end{matrix} = \begin{matrix} C^A \\ E \end{matrix} \cap \begin{matrix} C^B \\ E \end{matrix}$$

$$8) \begin{matrix} C^{A \cap B} \\ E \end{matrix} = \begin{matrix} C^A \\ E \end{matrix} \cup \begin{matrix} C^B \\ E \end{matrix}$$

Preuve:

$$(4) x \in A \cap (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (x \in B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(5) x \in (A \cup (B \cap C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } (x \in B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } (x \in C) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in B \text{ ou } x \in A) \text{ et } (x \in C \text{ ou } x \in A)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$



⑥ $x \in C_E^B$
 $\Leftrightarrow x \notin B$
 $\Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in C_E^A$
 car $(A \subset B)$

ou encore

$A \subset B$
 $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$
 $\Downarrow$
 $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ (non P)
 $x \in C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A$

⑦ $C_E^{A \cup B} \stackrel{?}{=} C_E^A \cap C_E^B$

$x \in C_E^{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B$
 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in C_E^A \text{ et } x \in C_E^B$
 $x \in A \text{ ou } x \in B \Leftrightarrow x \in C_E^A \cap C_E^B$

⑧ $x \in C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

$x \in C_E^{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin (A \cap B)$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$
 IE $A \cap B \Leftrightarrow x \in C_E^A \text{ ou } x \in C_E^B$
 $\Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B \Leftrightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B$

Exercice:

$A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

On suppose que $A \cup B = A \cup C$

" " $A \cap B = A \cap C$

Ma $B = C$?

$B = C$ eq $B \subset C$ eq $C \subset B$

$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B = A \cup C$ $\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array} \right.$
 $\Delta x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in A \cap B = A \cap C$
 $\Rightarrow x \in C$

démontré par la méthode avec l'élément arbitraire

Par symétrie on a

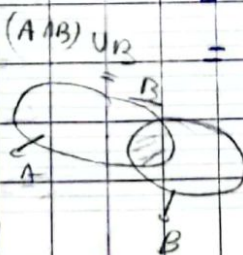
cl: $B = C$

$C \subset B$

$x \in C \Rightarrow x \in A \cup C = A \cup B$ $\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right.$
 $\Delta x \in A \text{ ou } x \in C \Rightarrow x \in A \cap C = A \cap B$
 $\Rightarrow x \in B$

2^e méthode

$B = B \cup (A \cap B)$
 $= B \cup (A \cap C)$
 $= (B \cup A) \cap (B \cup C)$
 $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$
 $= C \cup (A \cap B)$
 $= C \cup (A \cap C)$
 $= C$



Rq: soit I un ensemble d'indices et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tq } x \in A_i$$

* Produit cartésien

Définition: On appelle produit cartésien de E par F l'ensemble $E \times F$ défini par

$$E \times F = \{(a, b) ; a \in E \text{ et } b \in F\}$$

si $E = F$ on note $E^2 = E \times E$

Exemple: $E = \{1, 2\}$; $F = \{a, b, c\}$

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

le cardinal de $(E \times F)$: nb des couple = $\text{card}(E) \times \text{card}(F)$

Attention!! : si $E \neq F$: $E \times F \neq F \times E$

Rq: On peut généraliser ce produit cartésien et on note:

$$E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ avec } x_i \in E_i, 1 \leq i \leq n\}$$

$$n: a=c \text{ et } b=d$$

$I = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n\}$ ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$) est dit un n -uplet.

On note:

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i$$

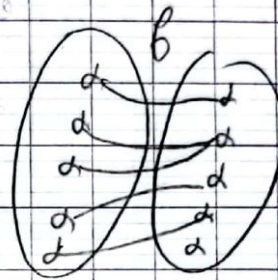
II. Application

Définition: Soit E et F deux ensembles.

f est l'application de E dans F

$$\Leftrightarrow (\forall x \in E) (\exists! y \in F \text{ tq } f(x) = y)$$

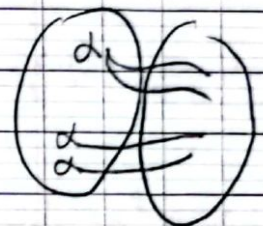
↓ existe un unique



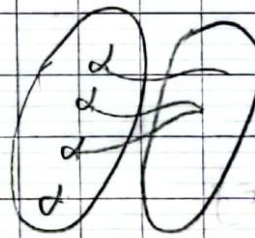
E

F

oui



non



non

Notation et vocabulaire:

$$f: E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto f(x)$$

E est dit l'ensemble de départ

F " " " " d'arrivée

$y = f(x)$: y est l'image de x par f ou encore x est l'antécédent de y par f .

$$\begin{aligned} \text{ex: } f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\downarrow \\ &\mathbb{R} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

On appelle Graph de f et on note $G_f = \{(x, f(x)) ; x \in E\}$.

On note par $\mathcal{F}(E, F)$ = ensemble des applications de E dans F

$$E = \{-1, -2, 2, 3, 4, 5\} \quad f(x) = x^2$$

$$F = \{-3, -1, 4, 16, 25, 9\}$$

$$G_f = \{(-1, 1), (-2, 4), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

Exemple générique:

Application identique de E on note id_E

$$\text{id}_E : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto x$$

$$f(x) = x$$

$$G_{\text{id}_E} = \{(x, x) ; x \in E\}$$

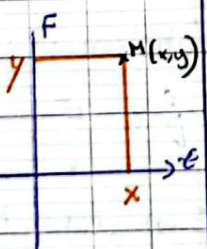
Projection:

$$P_1 : E \times F \rightarrow E$$

$$(x, y) \mapsto x$$

$$P_2 : E \times F \rightarrow F$$

$$(x, y) \mapsto y$$



Application caractéristique de A :
(indicateur):

E ensemble ; $A \in \mathcal{P}(E)$

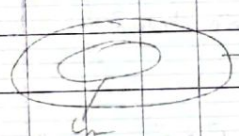
def:

$$\chi_A : E \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

ex: $E = \{a, b, c, d\}$ $A = \{d, b\}$

$$\begin{aligned} \chi_A(d) &= 1 & \chi_A(c) &= 0 \Rightarrow A = \{d, b\} \\ \chi_A(b) &= 1 & \chi_A(a) &= 0 \end{aligned}$$



Soit $A \subseteq E$
on a 2 éléments
maîtrisant $f: A \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Propriété:

$$(1) A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$$

$$(2) A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B \quad \text{v.s.}$$

$$(3) \chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$$

$$(4) \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$$

$$(5) \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

$$(6) \chi_{A \setminus B} = \chi_A (1 - \chi_B)$$

$$(7) \chi_{A \Delta B} = (\chi_A - \chi_B)^2$$

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B$$

démonstration de la suite des propriétés

(1)

Preuve:

" $\Rightarrow$ "

$$A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$$

$$\text{Hg } \forall x \in E \quad \chi_A(x) \leq \chi_B(x)?$$

$$E = A \cup \bar{A}$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : si } x \in A \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1$$

$$\text{ou si } x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$A \subset B$$

$$\Leftrightarrow \chi_B(x) = 1$$

$$\text{cl } \chi_A \leq \chi_B$$

2^{ème} cas

$$x \in \bar{A} \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \leq \chi_B(x)$$

donc

$$\text{cl } \forall x \in E \text{ on a } \chi_A(x) \leq \chi_B(x).$$

" $\Leftarrow$ "

$$\text{Hg si } \chi_A \leq \chi_B \text{ alors } A \subset B$$

$$x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \leq \chi_B(x)$$

Prop

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\Rightarrow A \subset B$$

$$\downarrow$$

$$\chi_B(x) = 1$$

$$x \in B$$

(2)

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

$$\Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \text{ et } \chi_B \leq \chi_A$$

$$\Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$$

(4)

$$\text{Hg } \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \quad \forall x \in E?$$

$$E = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

1^{er} cas:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = 1$$

$$\text{d'où l'on a } \chi_A \cdot \chi_B = 1 \cdot 1 = 1$$

2^{ème} cas

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$$

$$\chi_{A \cap B} = 0 \text{ et } \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$$

$$\text{cl } \forall x \in E \quad \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

exple:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ Hg.}$$

$$\begin{aligned} \chi_{A \cap (B \cup C)} &= \chi_A \cdot \chi_{B \cup C} \\ &= \chi_A \cdot (\chi_B + \chi_C - \chi_B \chi_C) \\ &= \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_C - \chi_A \chi_B \chi_C \end{aligned}$$

$$\chi_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = \chi_{A \cap B} + \chi_{A \cap C} - \chi_{A \cap B \cap C}$$

$$A \cap B \cap C = A \cap B \cap C$$

Restriction :

Def: Soit f une application de
E vers F et $A \subseteq E$

on parle de f restreinte à A .

$f|_A : A \rightarrow F$ c'est la
restriction de f à A

Exemple

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln(2|x| - x)$$

g(x)

$f|_{\mathbb{R}^{++}}$

$$\mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2 \ln(2x - x)$$

$$\begin{aligned} \text{id} : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto x \\ \text{id} : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Composition de deux applications:

E, F, G trois ensembles

$f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$

On appelle composée de f et g l'application de E dans G notée $g \circ f$.

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{g \circ f}$

définie par pour tout $x \in E$

$$g \circ f(x) = g[f(x)]$$

$$g \circ f(x) = g \left[\underbrace{f(x)}_{\substack{\in F \\ \downarrow \\ \in E}} \right] \in G$$

généralement:

Rq: !! attention: $f \circ g \neq g \circ f$.

$$\textcircled{1} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x$$

$$\text{soi } x \in \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(e^x) = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2) = e^{x^2} \neq e^{2x}$$

$\textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \text{id}_F \circ f(x) &= \text{id}_F[f(x)] \\ &= f(x) \Rightarrow \text{id}_F \circ f = f \end{aligned}$$

$$f \circ \text{id}_E(x) = f[\text{id}_E(x)] = f(x)$$

$$f \circ \text{id}_E = f$$

Théorème:

soit E, F, G, H quatre ensembles:

et $f \in \mathcal{F}(E, F)$

$g \in \mathcal{F}(F, G)$, $h \in \mathcal{F}(G, H)$

$$\textcircled{1} (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

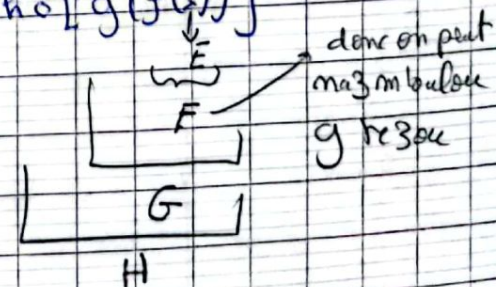
$$\bullet (f \circ g) \circ h(x) = f \circ g[h(x)]$$

$\downarrow$
 $\boxed{G}$
 H

or départ de $g = F$ donc cette écriture n'a pas de sens.

$$\textcircled{2} (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$h \circ (g \circ f) = h[g(f(x))]$$

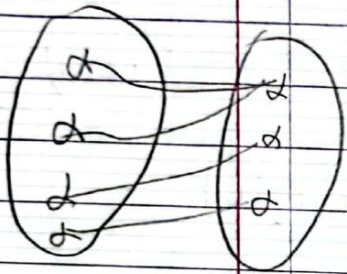


$$\Rightarrow (h \circ g) \circ f \in \mathcal{F}(E, H)$$

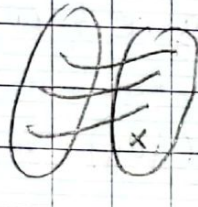
injective:

Definition:

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On dit que f est injective de E dans F si tout élément de F a au plus un antécédent dans E .



non injective



injective

$$\left(\text{on a ainsi } \forall x, x' \in E \right. \\ \left. \text{si } f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \right)$$

exemple: est-ce que f est injective?

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n+1$$

$$\forall m, n' \in \mathbb{N} \text{ on a } f(m) = f(n')$$

$$\stackrel{??}{\Rightarrow} m = n'$$

$$f(m) = f(n')$$

$$2m+1 = 2n'+1 \Rightarrow m = n'$$

d'où f est injective.

$$x \mapsto f(x) = x$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}$$



ou encore

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow (\text{si } x \neq x' \\ \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

pour mg f est n'est pas injective

me sou 2 élément $\neq$

au même image

exemple $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto x^2$$

1 et -1 ont la même image

$$\text{on } f(x) = f(x') \Rightarrow x' = x$$

$$x^2 = x'^2$$

$$\rightarrow x = x'$$

$$\rightarrow x = -x'$$

d'où f est non injective.

En pratique:

Pour montrer que

$f: E \rightarrow F$ injective.

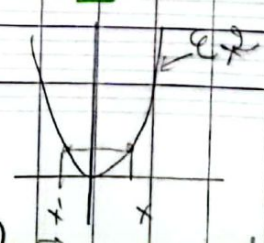
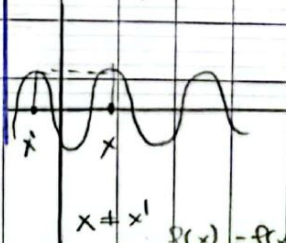
soit $x, y \in E$

$$\text{tq } f(x) = f(y) \Rightarrow \dots \Rightarrow x = y$$

Pour montrer que f est non injective il suffit de trouver

y_0, x_0 tq

$$f(x_0) = f(y_0) \text{ et } x_0 \neq y_0$$



$A \cup B = A \cup C$
much m_3 m_4 $B \cup C$

$m, m', m'', m \in \mathbb{N} \in \mathbb{Z}$
 $x, y, z \rightarrow \in \mathbb{N}$

$z, z', z'' \rightarrow \in \mathbb{R}$

Exemple:

$$1) f: \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{z}{z-i}$$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ tq } f(z) = f(z')$$

$$\Rightarrow z = z'$$

$$f(z) = f(z') \Rightarrow \frac{z}{z-i} = \frac{z'}{z'-i}$$

$$\Rightarrow \cancel{z} z' / \cancel{z'} z = \cancel{z} z' / \cancel{z'} z'$$

$$\Rightarrow z = z'$$

cl f est injective.

$$2) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

$$f(1) = f(-1) \text{ et } 1 \neq -1$$

donc f est non injective.

$$3) P(\mathbb{N}) \xrightarrow{f} P(\mathbb{N})$$

$$x \mapsto x \cup \{0\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$$

$$f(\{0\}) = \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$$

$\left. \begin{matrix} f(\emptyset) = \{0\} \\ f(\{0\}) = \{0\} \end{matrix} \right\} \text{ égaux}$

et $\emptyset \neq \{0\}$ cl f non injective

Théorème:

① La composée de deux injections est une injection.

② si la composée $g \circ f$ est injective alors f est injective.
(sans aucune idée). $\Rightarrow$

si f non injective ($g \circ f$) est non injective.

Preuve:

① soit $f \in f(E, F)$
soit $g \in f(F, G)$ tq
 f et g sont injectives $\Rightarrow$ a-t-on
 $g \circ f$ injective?

$$g \circ f: E \rightarrow G$$

$$\forall x, y \in E \text{ tq } g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

$$= g[f(x)] = g[f(y)]$$

$$\Downarrow g \text{ injective}$$

$$f(x) = f(y)$$

$$\Downarrow f \text{ injective}$$

$$x = y$$

donc vrai

② tq f est injective?
 $\forall x, y \in E$ tq $f(x) = f(y)$
 $\Rightarrow ? \quad x = y$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

$$[(h \circ g) \circ f]$$

=

$$[h \circ (g \circ f)]$$

si j'ai Kolha injective
donc je peut deduire que
 f est injective ou $(g \circ f)$
est injective.

Ki babda 3andi composé
injective $\Rightarrow$ l'ensemble

à droite est injective

mais j'ai aucune idée

sur le theme ci

gauche (il peut au

paratre injective)

$g \circ f$

Attention:

dans ② g n'a aucune
raison d'être injective

en effet:

un exemple

tg $g \circ f$ et f injective

alors que g non

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x$$

injective

$$e^x = e^y \Rightarrow x = y$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

non

injective

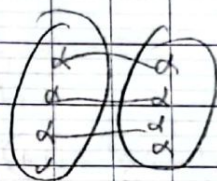
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(e^x) = e^{2x}$$

$$e^{2x} = e^{2y} \quad (\text{injective})$$

$$\Rightarrow x = y$$

Surjective:

soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On dit que
 f est surjective de E sur F
ou que f est une surjection
si tout élément de F a
au moins un antécédent dans E



non surjective

et injective



surjective et non

injective.

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E$$

$$\text{tg } y = f(x).$$

En pratique: f surjective?

$$\forall y \in F \exists? x \in E \text{ tg } f(x) = y.$$

$$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad x = \dots$$

exemple:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

surjective?

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists? x \in \mathbb{R}^+ \text{ tg } f(x) = y$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

$\Rightarrow f$ surjective.

si $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ non surjective

car les $(-)$ n'ont pas d'antécédent

3 antécédents

$x^2 = y$ si $y < 0$
impossible.

$$(2) f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$



les impaires
3 antécédents
antécédent

$3 \in \mathbb{N}$ et $\nexists n \in \mathbb{N}$
arrivé départ

tg $f(n) = 3$.

donc f non surjective.

de même pour $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto 2n+1$$

tout les paires n'ont pas
d'antécédent

$$(3) f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$x \mapsto x \cup \{0\}$$

soit $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \exists? x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\text{tg } f(x) = \emptyset$$

$\nexists x \text{ tg } x \cup \{0\} = \emptyset$ impossible
 f est non surjective

Théorème:

(1) La composée de deux surjections
est une surjection

(2) si $g \circ f$ est surjective alors
 g est surjective.

Preuve.

(1) Soit $f \in \mathcal{S}(E, F)$ et $g \in \mathcal{S}(F, G)$
qui sont surjectives
a-t-on $g \circ f \in \mathcal{S}(E, G)$ surjective?

$$\forall z \in G, \exists? x \in E \text{ tg } z = g \circ f(x)$$

$$z \in G \xRightarrow{g \text{ surjective}} \exists x_1 \in F \text{ tg } g(x_1) = z$$

or $x_1 \in F$ et f surjective donc

$$\exists x \in E \text{ tg } x_1 = f(x)$$

$$\text{ainsi } g(f(x)) = z \Rightarrow g \circ f(x) = z.$$

$$7^2 = 49$$

Application bijective:

Def: une app f de E dans F est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective. C-à-d tout élément de F possède un seul antécédent de E .

f bijective de E dans $F \Leftrightarrow$

$$\forall y \in F \exists ! x \in E : f(x) = y.$$

Exple: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x^2$

f bijective?

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \exists ! x \in \mathbb{R}^+ \text{ tq}$$

$$f(x) = y$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}.$$

②

$$\text{id}_E: E \rightarrow E$$

$$x \mapsto x \text{ bien bijective}$$

③

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b \quad (a \neq 0)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R} : f(x) = y.$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a} \rightarrow \text{bijective.}$$

Théorème:

① si f est bijective et g est bijective alors la composée de f et g est bijective.

② Si $g \circ f$ est bijective $\Rightarrow g$ surjective et f injective.

Attention: Si $g \circ f$ bijective

~~f est bijective et g bijective~~
 (voir l'autre exemple)

Définition:

soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$ on appelle réciproque de f toute application $g \in \mathcal{F}(E, E)$.

$$\text{tq } g \circ f = \text{id}_E$$

$$\text{et } f \circ g = \text{id}_F$$

on note généralement $g = f^{-1}$

• Mq f est la réciproque de f .

$$\text{on calcule: } g \circ f \rightarrow \text{id}_E$$

$$f \circ g \rightarrow \text{id}_F$$

$\Rightarrow g$ est réciproque de f et $g = f^{-1}$

Rq: toute app bijective possède une réciproque. $f(x) = y$ et f bijective $\Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Théorème:

si f et g bijectives alors $g \circ f$.

est aussi bijective et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

! att à l'ordre

$$f \in \mathcal{F}(E, E)$$

$$g \in \mathcal{F}(E, E)$$

$\cdot$ id $\rightarrow$ 1 est le produit
ou 0 est la somme

Preuve:

La réciproque de $g \circ f$ est $h = f^{-1} \circ g^{-1}$

$$(g \circ f) \circ h = \text{id}?$$

$$h \circ (g \circ f) = \text{id}?$$

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ h &= (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ \text{id} \circ g^{-1} \\ &= (g \circ \text{id}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} = \text{id}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = \text{id}. \end{aligned}$$

Exercice:

Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x+5}{1-x}$

avec $F \subset \mathbb{R}$.

Déterminer F pour que f est bijective et donner f^{-1} .

f est bije

$$\forall y \in F \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ tq } f(x) = y.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{1-x} = y$$

$$= f^{-1}(y) = x$$

$$\Leftrightarrow x+5 = y(1-x) \Leftrightarrow x(1+y) = -2y+5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2y+5}{1+y} \quad y \neq -1$$

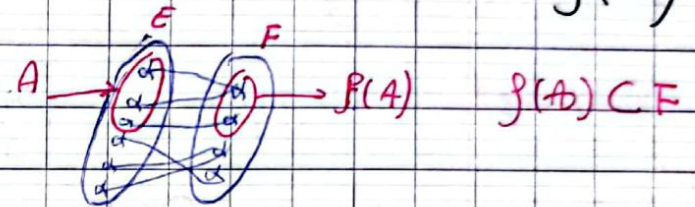
$$F = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$x \mapsto \frac{-2x+5}{1-x}$$

*** Image d'un ensemble par une application:** (ACE)

Soit f une application de E vers F . $f(E, F)$
on appelle image de A par f est l'ensemble des images des éléments de A et elle est notée $f(A)$



En pratique:

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \text{ tq } f(x) = y$$

$$f(A) = \{y \in F; x \in A \text{ tq } f(x) = y\}$$

$$= \{f(a); a \in A\}$$

Exple:

① $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto (\text{Re } z)^2$
 $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^+$

② $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$

③ $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad x \mapsto 2x$
 $f(\mathbb{N}) = 2\mathbb{N}$
 $= \{2k; k \in \mathbb{N}\}$

④ $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \quad z \mapsto e^{iz}$
 $f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$
 $= \mathbb{U}$

Soit $A \subset E$

$$\chi_A: E \rightarrow \bar{E}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

$$\chi_A(A) = \{1\}$$

$$\chi_A(E) = \{0, 1\}$$

$$\chi_A(\bar{A}) = \{0\}$$

$$\chi_A(\emptyset) = \emptyset$$

$$(1) f(\{x\}) = \{f(x)\}$$

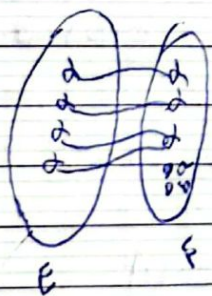
$$(2) f(\emptyset) = \emptyset$$

Proposition: soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$

- $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

* Preuve:

$$\begin{aligned} (1) \quad y \in f(A) &\iff \exists x \in A \text{ tq } y = f(x) \\ &\implies \exists x \in B \text{ tq } y = f(x) \\ A \subset B & \\ &\implies y \in f(B). \end{aligned}$$



$$f(E) = F \setminus \{a, b\}$$

Attention: $f: E \rightarrow F$
 f surjective $\iff f(E) = F$

(2)

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

$$y \in f(A \cap B) \iff \exists x \in A \cap B \text{ tq } f(x) = y$$

$$\iff \exists x \in A \text{ et } x \in B \text{ tq } f(x) = y$$

$$f(x) = y$$

$$\implies y \in f(A) \text{ et } y \in f(B)$$

$$\implies y \in f(A) \cap f(B)$$

III. Relation d'équivalence:

Def: une relation binaire (R)
 est une relation d'équivalence
 définie sur E si elle est:

$$(1) \text{ réflexive : } \forall x \in E \quad x R x$$

$$(2) \text{ Symétrique : } \forall x, y \in E \\ \text{si } x R y \text{ et } y R x \text{ alors } x R y \\ \implies y R x$$

$$(3) \text{ transitive : } \forall x, y, z \in E \\ \text{si } x R y \text{ et } y R z \text{ alors } x R z$$

exemple:

$$(1) \quad E = \{\text{droite de plan}\}$$

R relation sur E définie par:

$$\forall D, D' \in E \quad D R D' \iff D \parallel D'$$

"// " Relation d'équivalence

"⊥ " n'est pas R d'équivalence.

② $f \in \mathcal{F}(E, F)$
 $x R y \text{ssi } f(x) = f(y)$

• reflexive?

$\forall x \in E \quad x R x?$
 ou $f(x) = f(x)$

→ Reflexive

• Symétrique?

$\forall x, y \in E \quad x R y \stackrel{?}{\Rightarrow} y R x$
 $x R y$
 $f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x)$
 $= y R x.$

→ Symétrique

• Transitive?

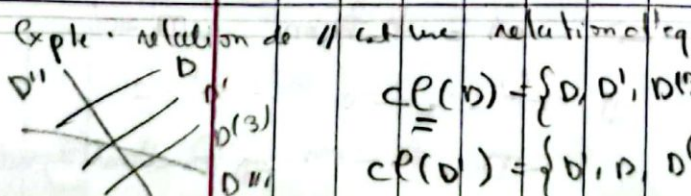
$\forall x, y, z \quad x R y \text{ et } y R z \stackrel{?}{\Rightarrow} x R z?$
 ou $f(x) = f(y)$
 $\Rightarrow f(y) = f(z)$
 $\Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow \underline{x R z}.$

$\Rightarrow$ Relation d'équivalence:

* Classe d'équivalence:

Soit R une relation d'équivalence.
 Chappelte classe de x et on note
 $cl(x)$ ou $\bar{x}$ ou $\bar{x}$ c'est l'ensemble
 des $y \in E$ tq y est en relation avec x .

$cl(x) = \{y \in E, y R x\}$



$cl(D) = \{D, D', D''\}$
 $cl(D) = \{D, D', D''\} = cl(D'')$

Exemple: $E = \mathbb{R} \quad x R y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
 1) Hq R est une relation d'équivalence
 2) $cl(x)? \quad (x \in \mathbb{R})$

1) $x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
 avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2.$

donc R est une relation d'équivalence.

2) $cl(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tq } y R x\}$
 genre de x

$= \{y \in \mathbb{R} \text{ tq } y^2 = x^2\}$

$= \{y \in \mathbb{R} \text{ tq } y = x \text{ ou } y = -x\}.$

$\begin{cases} \rightarrow \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \rightarrow \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ car dans ensemble d'éléments ne se répète pas

La classe de x n'est jamais vide.
 car c'est une R d'eq $\Rightarrow cl(x)$ se ha
 donc x un 3ah hjet asmi...

expi: $x R y \Rightarrow y^3(x^2+1) = x^3(y^2+1)$
 $\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{y^3}{y^2+1}$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$: d'après le
 cours R est une relation d'eq
 avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$

egalite ensembliste (hys) double
inclusion $A=B$ $A \subset B$ et $B \subset A$

Carre lya m'analyse les y qui ont

Rqs:

① $\bar{x} \neq \emptyset$ car $x \in R_x$ ($x \in \bar{x}$)

② $x R y \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

" $\Rightarrow$ " Hq $\bar{x} = \bar{y}$? x et y deux
ensemble.

Hq $\bar{x} \subset \bar{y}$?

soit $z \in \bar{x} \Rightarrow z R x$

ou $x R y$

(transitive) $\Rightarrow z R y$

$\Rightarrow z \in \bar{y}$

par symetrie $y R x$

" $\Leftarrow$ " $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x R y$

on a h'au $x \in \bar{x} = \bar{y}$

$\Rightarrow x \in \bar{y}$

$\Rightarrow x R y$

③ si $x R y \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y}$

* Relation d'ordre:

soit E ensemble et R une

relation binaire (entre 2 elements)

on dit que R est une relation
d'ordre ssi:

R est reflexive: $\forall x \in E, x R x$

② $\forall$

R antisymetrique:

$\forall x, y \in E$ si $(x R y \text{ et } y R x)$
 $\Rightarrow x = y$

③ R transitive

$(\forall x, y, z \in E$

$x R y \text{ et } y R z \Rightarrow x R z)$

" $\Leftarrow$ " est une relation d'ordre
"inclusion" " " "

exemples:

① " $\Leftarrow$ " est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

② " $\subset$ " est " " " sur $\mathcal{P}(E)$

③ $E = \mathbb{N}^*$ $n, m \in E$
 $n R m$
 $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* m = kn$

on a $n R m$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $n = 1 \cdot n$

$\Rightarrow R$ reflexive

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ tq
 $(n R m \text{ et } m R n) \Rightarrow n = m$

$n R m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* m = kn$
 $m R n \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}^* n = k'm$

$\Rightarrow m = k k' m$ ($m \neq 0$)

$\Rightarrow k k' = 1 \Rightarrow k = k' = 1$