

Chapitre 1

Ensembles

1.1 Vocabulaire général

Définition 1.1 On appelle ensemble toute collection d'objets. On appelle élément d'un ensemble E tout objet appartenant à la collection d'objets définissant E .

Pour écrire que x est un élément de E , on note $x \in E$.

On appelle partie de E tout ensemble F d'éléments de E . On dit alors que F est inclus dans E et on note $F \subset E$. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Dans icelui, il y a deux ensembles remarquables : E et $\emptyset$, qui est appelé vide et qui est la partie de E qui ne contient aucun élément de E .

Remarque 1.1 Hors de tout contexte, la signification de $\emptyset$ n'est pas claire. En effet, il peut signifier une partie de E : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ ou un ensemble de parties de E : $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$, ...

Définition 1.2

- L'ensemble E des objets vérifiant une propriété P est noté

$$E = \{x, x \text{ vérifie } P\}$$

Dans cette écriture, x est une lettre muette et peut être remplacée par tout autre lettre sans changer l'ensemble. Ainsi $\{y, y \text{ vérifie } P\}$ désigne aussi E . De même, un élément choisi dans E peut porter n'importe quel nom.

- Lorsque la propriété P est la réunion d'une propriété Q et d'une appartenance à un autre ensemble F , plutôt que note $E = \{x, x \text{ vérifie } Q \text{ et appartient à } F\}$, on écrit plus brièvement

$$E = \{x \in F, x \text{ vérifie } Q\}$$

- Parfois, vérifier une propriété P consiste à être d'une certaine forme. Cela revient à connaître un ensemble de paramètres A et une application f définie sur A tels que les objets étudiés soient ceux qui s'écrivent $f(a)$ pour au moins un élément a de A . Plutôt que noter $E = \{x, \text{il existe } a \in A \text{ tel que } x = f(a)\}$, on écrit plus brièvement :

$$E = \{f(a), a \in A\}$$

Dans cette écriture, on ne peut pas ajouter d'autre propriété ou la forme des éléments manipulés. En particulier, l'appartenance des éléments à un ensemble particulier ne peut plus être indiquée.

Exemple 1.1

- L'ensemble des solutions réelles de l'équation $x^7 + 2x - 3 = 0$ est $\{x \in \mathbb{R}, x^7 + 2x - 3 = 0\}$
- L'ensemble des solutions rationnelles de l'équation $x^7 + 2x - 3 = 0$ est $\{x \in \mathbb{Q}, x^7 + 2x - 3 = 0\}$
- L'ensemble des rationnels sommes de deux carrés de rationnels s'écrit $\{p^2 + q^2, (p, q) \in \mathbb{Q}^2\}$
- L'ensemble des entiers sommes de deux carrés de rationnels s'écrit $\{x \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in \mathbb{Q}^2, x = p^2 + q^2\}$.

1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 1.3 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On appelle union (resp. intersection) de A et B , et on note $A \cup B$ (resp. $A \cap B$) la partie de E dont les éléments sont ceux de E contenus dans A ou B (resp. A et B).

On appelle complémentaire de A dans E et on note $E \setminus A$ la partie de E contenant tous les éléments de E n'appartenant pas à A .

Définition 1.4 Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F , noté $E \times F$ l'ensemble $\{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Remarque 1.2 On peut étendre les notions de produit cartésien, union et intersection à un nombre fini d'ensembles ou de parties de E . Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E)^n$, on a

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in E, \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \in A_i\} \text{ et } \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \in E, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \in A_i\}$$

Proposition 1.1 Soit E un ensemble et A, B, C, D quatre parties de E telles que $A \subset C$ et $B \subset D$. On a alors $A \cup B \subset C \cup D$, $A \cap B \subset C \cap D$ et $E \setminus C \subset E \setminus A$.

Démonstration.

- Soit $x \in A \cup B$. Par définition, $x \in A$ ou $x \in B$. Comme $A \subset C$ et $B \subset D$, on a $x \in C$ ou $x \in D$, donc $x \in C \cup D$.
- Soit $x \in A \cap B$. $x \in A \subset C$ et $x \in B \subset D$ donc $x \in C \cap D$.
- Soit $x \in E \setminus C$. On a $x \in E$ et $x \notin C$. Comme $A \subset C$, si $x \in A$, alors $x \in C$, ce qui est absurde. Donc $x \notin A$ et $x \in E \setminus A$. ■

Proposition 1.2 Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E . On a

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
5. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$
6. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

Démonstration.

- 1., 2. Évident
3. Soit $x \in E$. On a $x \in (A \cup B) \cap C$ ssi $x \in A \cup B$ et $x \in C$ ssi ($x \in A$ ou $x \in B$) et $x \in C$ ssi ($x \in A$ et $x \in C$) ou ($x \in B$ et $x \in C$) ssi $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Finalement, on a l'égalité recherchée.
4. Analogie
5. Soit $x \in E$. On a $x \in E \setminus (A \cap B)$ ssi $x \in E$ et $x \notin A$ ou $x \notin B$ ssi $x \in E \setminus A$ ou $x \in E \setminus B$ ssi $x \in (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$. D'où le résultat.
6. Analogie ■

1.3 Relations d'ordre

Définition 1.5 On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur E toute assertion logique associant à certains couples (x, y) d'éléments de E la valeur logique « vrai ». Le cas échéant, on note $x\mathcal{R}y$. Par exemple, la relation binaire « être de la même taille » est une relation binaire sur l'ensemble des êtres humains.

Définition 1.6 On appelle relation d'ordre sur un ensemble E toute relation binaire sur E vérifiant :

- Pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$ (réflexivité)
- Pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ implique $x = y$ (antisymétrie)
- Pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ implique $x\mathcal{R}z$ (transitivité).

On dit que deux éléments de E sont comparables pour une relation d'ordre $\mathcal{R}$ lorsque $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Si deux éléments quelconques de E sont comparables, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total, Dans le cas contraire, l'ordre est dit partiel.

Remarque 1.3 Si x et y sont deux éléments d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$, écrire $x \leq y$ signifie avant tout que x et y sont comparables, puis que x est plus petit que y . Ceci ne pose pas de problème dans les ensembles totalement ordonnés.

Exemple 1.2

- Les relations d'ordre bien connues sur les ensembles de nombres sont des relations d'ordre total (deux nombres sont toujours comparables).
- La relation d'inclusion sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. En effet, toute partie de $\mathbb{R}$ est incluse dans elle-même, si deux parties A et B de $\mathbb{R}$ vérifiant $A \subset B$ et $B \subset A$ sont égales et trois parties (A, B, C) de $\mathbb{R}$ qui vérifient $A \subset B$ et $B \subset C$ vérifient aussi $A \subset C$. En revanche, les parties $]0, 2[$ et $[1, 3]$ ne sont pas comparables, ce qui assure que la relation d'inclusion est un ordre partiel.

Définition 1.7 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On appelle plus grand élément (resp. plus petit élément) de E tout élément $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $x \leq a$ (resp. $a \leq x$).

Exemple 1.3

- L'ensemble des entiers naturels, muni de son ordre naturel, admet 0 comme plus petit élément mais n'admet pas de plus grand élément.
- Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on sait que $\emptyset \subset A \subset \mathbb{R}$. Autrement dit, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ muni de l'ordre de l'inclusion, admet $\emptyset$ comme plus petit élément et $\mathbb{R}$ comme plus grand élément.

Proposition 1.3 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Si E admet un plus grand (resp. plus petit) élément, icelui est unique et on le note $\max(E)$ (resp. $\min(E)$).

Démonstration. Soit a et b deux plus grands éléments de E . On a par définition $a \leq b$ et $b \leq a$ donc $a = b$. ■

Définition 1.8 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$. On appelle majorant (resp. minorant) de A tout élément $M \in E$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$ (resp. $M \leq x$). Une partie de E admettant un majorant (resp. un minorant) est dite majorée (resp. minorée).

Une partie de E est dite bornée ssi elle est majorée et minorée.

Exemple 1.4

- On munit $\mathbb{R}$ de son ordre usuel. La partie $\{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^*\}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
- On munit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de la relation d'inclusion. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$ donc $\{A, B\}$ est majorée par $A \cup B$ et minorée par $A \cap B$.